

Informace k zápočtu a ke zkoušce z předmětu BAA016 (Analýza dat)

Harmonogram přednášek

1. Základní matematické pojmy, zobrazení, posloupnosti a řady.
2. Elementární a složené funkce, jejich vlastnosti. Polynomy.
3. Limita funkce jedné proměnné, spojitost, derivace.
4. Derivace funkce jedné proměnné, Taylorova věta, l'Hospitalovo pravidlo.
5. Průběh funkce jedné proměnné, asymptoty.
6. Neurčitý integrál, integrační metody.
7. Určitý integrál a jeho aplikace.
8. Klasická, geometrická a axiomatická pravděpodobnost, podmíněná pravděpodobnost, Bayesův vzorec.
9. Diskrétní náhodná veličina a její funkční a číselné charakteristiky. Vybraná diskrétní rozdělení.
10. Spojitá náhodná veličina a její funkční a číselné charakteristiky. Vybraná spojitá rozdělení. Centrální limitní věta.
11. Základy popisné statistiky, výběrové charakteristiky souboru.
12. Úvod do testování statistických hypotéz, jednovýběrový a dvouvýběrový t-test, F-test.
13. Jednovýběrový test parametru alternativního rozdělení, neparametrické testy (znaménkový, Wilcoxonův).

Harmonogram cvičení

První týden opakování ze střední školy, další týdny cvičení k přednáškám z předchozího týdne.

Zápočet

Požadavky nutné pro získání zápočtu sdělí studentům jejich vyučující během prvního cvičení. Především musí být splněny tyto podmínky:

- (i) neomluvené neúčasti nejsou povoleny,
- (ii) získání alespoň 40 % bodů v součtu ze dvou zápočtových testů.

Zápočtové testy jsou plánovány v 7. a 11. týdnu semestru. Tvoří jej příklady z témat probraných dle harmonogramu do 7. a do 11. týdne výuky. U testů je možné použít kalkulačku. Studentům, kteří nezískají požadovaný počet bodů, umožní vyučující jeden opravný test pokrývající témata obou řádných testů, ze kterého je nutné získat 40 % bodů.

Student má povinnost prokázat u testů svou totožnost ISIC kartou, případně jiným platným průkazem totožnosti. Body získané na zápočtových testech se nepřenášejí do hodnocení zkoušky.

Zkouška

Semestrální zkouška je písemná. Každý student během 90 minut řeší čtyři příklady z okruhů níže, přičemž z okruhu I. a II. budou do zadání zkoušky vybrány vždy dva příklady. Výsledné hodnocení je dáno klasifikační stupnicí ECTS podle Studijního a zkušebního řádu VUT (100–90 bodů: A, 80–89 bodů: B, 70–79 bodů: C, 60–69 bodů: D, 50–59 bodů: E, 0–49 bodů: F).

Okruhy ke zkoušce.

I. Základy matematické analýzy

- (a) Elementární a složené funkce, jejich vlastnosti a grafy.
- (b) Derivace funkce jedné proměnné a její použití (Taylorův polynom, l'Hospitalovo pravidlo, průběh funkce jedné proměnné).
- (c) Neurčitý integrál a základní metody jeho výpočtu. Určitý integrál a jeho aplikace.

II. Matematická statistika

- (a) Klasická a podmíněná pravděpodobnost, Bayesův vzorec.
- (b) Diskrétní a spojitá náhodná veličina, jejich funkční a číselné charakteristiky.
- (c) Vybraná diskrétní a spojitá rozdělení pravděpodobnosti.
- (d) Testování statistických hypotéz (jednovýběrové a dvouvýběrové testy o parametrech normálního rozdělení).

Student má povinnost prokázat svou totožnost u zkoušky ISIC kartou, případně jiným platným dokladem totožnosti. V jiném případě může být ze zkoušky vyloučen.

Každý student si s sebou **přinese**:

- psací potřeby,
- kalkulačku,
- 4 čisté listy formátu A4 nerozebíratelně sešité sponkou.

U zkoušky **nejsou povoleny**:

- žádné písemně zpracované pomůcky; statistické tabulky a vybrané základní vzorce donese na písemku zkoušející,
- elektronická zařízení vyjma kalkulaček, zejména nesmí mít student v dosahu mobilní telefon nebo jiné výpočetní či komunikační zařízení,
- volné papíry.

Věci osobní potřeby studenta budou uloženy na místech určených osobou provádějící dozor u zkoušky.

Ukázkový zkouškový test č. 1.

Příklad 1. Je dána funkce

$$f(x) = x^2 e^{-x}.$$

- (a) Určete definiční obor funkce.
- (b) Určete nulové body funkce a znaménko funkce.
- (c) Rozhodněte, kde je funkce rostoucí a klesající, nalezněte lokální extrémy funkce.
- (d) Na základě získaných informací načrtněte průběh funkce.

Příklad 2. Pomocí určitého integrálu určete velikost plochy ohraničené křivkami $y = x^2$ a $y = 2 + x$.

- (a) Křivky načrtněte a vyznačte zadanou plochu.
- (b) Zapište a vyčíslete určitý integrál pro výpočet obsahu této plochy.

Příklad 3. Diskrétní náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.15	0.55	0.20	0.10

- (a) Zapište a zakreslete distribuční funkci $F(x)$.
- (b) Určete pravděpodobnosti $P(X \geq 1)$, $P(X = 2)$.
- (c) Spočítejte střední hodnotu $E X$, modus $\text{Mod}(X)$ a rozptyl $D X$ náhodné veličiny X .

Příklad 4. Na určité stanici byla v náhodně vybraných dnech sledována koncentrace jemných prachových částic v ovzduší. Získaly se hodnoty (v $\mu\text{g}/\text{m}^3$):

25.4 12.9 36.4 28.4 16.4 18.7 10.5 36.7 23.4 19.3 19.1 21.2

- (a) Lze na hladině významnosti 0.05 tvrdit, že dlouhodobý průměr v tomto místě překračuje hodnotu $20 \mu\text{g}/\text{m}^3$?

Koncentrace byly sledovány také na jiné stanici a dostaly se hodnoty:

12.8 23.9 24.4 15.7 8.7 20.3 13.5 10.9

- (b) Na hladině významnosti 0.05 ověřte, zda se dlouhodobé průměry na obou stanicích statisticky významně liší.

Ukázkový zkouškový test č. 2.

Příklad 1. Určete Taylorův polynom 3. řádu se středem v bodě $x_0 = 1$ funkce

$$f(x) = x \ln x.$$

Příklad 2. Vypočtete neurčité integrály

$$\int x \sin x \, dx, \quad \int \frac{x}{1 - 2x^2} \, dx.$$

Příklad 3. Spojitá náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = c \cdot (9 - x^2), \quad x \in \langle 0, 3 \rangle.$$

- (a) Určete konstantu $c \in \mathbb{R}$.
- (b) Zapište a zakreslete distribuční funkci $F(x)$.
- (c) Určete pravděpodobnosti $P(X \geq 1)$, $P(X = 2)$.

Příklad 4. V určitém místě daného vodního toku dochází k vývěrům podzemního pramene. Protože množství vyvěrající vody není možné měřit přímo, byl v náhodně vybraných dnech měřen průtok vody v horním (X_i) a současně v dolním (Y_i) profilu toku. Získaly se hodnoty [m^3/s]:

den č.	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	22.48	15.20	9.45	18.34	21.11	15.80	7.44	21.63
Y_i	22.80	15.22	9.62	18.75	21.63	16.01	8.02	21.86

Na hladině významnosti 0.05 ověřte, zda průměrný průtok vyvěrající vody, tj. rozdíl mezi průtokem v dolním a horním profilu, statisticky významně překračuje hodnotu $0.3 \text{ m}^3/\text{s}$. Předpokládejte, že průtok vyvěrající vody je náhodná veličina s normálním rozdělením.

Ukázkový zkouškový test č. 3.

Příklad 1. Je dána funkce

$$f(x) = x^3 - 3x + 4.$$

- (a) Určete definiční obor funkce.
- (b) Rozhodněte, kde je funkce rostoucí a klesající, nalezněte lokální extrémy funkce.
- (c) Rozhodněte, kde je funkce konvexní a konkávní, nalezněte inflexní body funkce.
- (d) Na základě získaných informací načrtněte průběh funkce.

Příklad 2. Načrtněte zadané funkce f a g . Vyznačte plochu, kterou obě funkce svírají na intervalu $\langle 1, 3 \rangle$ a určete její velikost.

$$f(x) = e^{-x}, \quad g(x) = x - 5.$$

Příklad 3. Student si u zkoušky náhodně vybírá 3 otázky z 30 celkových, připravil se ale pouze na 20 z nich. Zavedme náhodnou veličinu X , která udává počet správně zodpovězených otázek ze 3 vylosovaných. (Předpokládejte, že správně odpoví právě na ty otázky, na které se připravil.)

- (i) Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X .
- (ii) Zkoušku úspěšně složí, pokud správně odpoví alespoň na 2 z nich. Jaká je pravděpodobnost tohoto jevu?
- (iii) Určete střední hodnotu a rozptyl počtu správně zodpovězených otázek.

Příklad 4. Byly mezi sebou porovnávány dvě šarže téhož léku vyrobené ve dvou různých závodech. V náhodně vybraných vzorcích byl vždy stanoven obsah léčivé látky. Získaly se hodnoty [mg]:

závod	obsah látky									
č. 1	495	504	510	502	498	498	508	501	488	506
č. 2	502	501	496	508	499	512	505	507		

Na hladině významnosti 0.05 ověřte:

- (a) zda oba závody vyrábějí léky se srovnatelnou variabilitou obsahu léčivé látky, tj. zda existuje statisticky významný rozdíl mezi rozptyly,
- (b) zda oba závody vyrábějí léky se stejným průměrným obsahem léčivé látky, tj. zda existuje statisticky významný rozdíl mezi středními hodnotami.