

Informace ke zkoušce z předmětu BAA004 (Matematika 4)

Harmonogram přednášek

1. Náhodné jevy (základní prostor, operace), pravděpodobnost (klasická, axiomatická) a její vlastnosti.
2. Podmíněná a úplná pravděpodobnost, Bayesova věta, nezávislost náhodných jevů.
3. Náhodná veličina: zavedení a funkční charakteristiky.
4. Číselné charakteristiky náhodných veličin.
5. Vybraná diskrétní rozdělení pravděpodobnosti: A, Bi, Hg, Po.
6. Vybraná spojitá rozdělení pravděpodobnosti: Ro, N, χ^2 , Studentovo a Fisherovo rozdělení.
7. Dvourozměrný náhodný vektor, sdružené a marginální funkční charakteristiky, nezávislost složek, číselné charakteristiky.
8. Náhodný výběr, výběrové statistiky (vlastnosti, jejich rozdělení pro výběr z N). Centrální limitní věta.
9. Bodové odhady (nestranné, nejlepší, konzistentní) a intervalové odhady pro N a pro parametr A.
10. Testování statistických hypotéz: princip a jednovýběrové testy (z test, t test, χ^2 test rozptylu, asymptotický test parametru A).
11. Dvouvýběrové testy: F test, t test pro neznámé stejné/různé rozptyly, párový t test, shoda parametrů A.
12. Testy dobré shody: χ^2 test, grafická diagnostika (histogram, QQ plot, PP plot), případně další testy.
13. Základy regresní analýzy.

Literatura

Základní literaturou k předmětu je kniha

Neubauer, J., Sedlačík, M., Kříž, O.: *Základy statistiky. Aplikace v technických a ekonomických oborech*. Grada, Praha, 2021, 3. vydání.

Kniha je studentům k dispozici prezenčně v KIC FAST nebo online zde: <https://www.vut.cz/uk/eiz/database/bookport> (dále přihlášení pomocí VUT účtu).

Další doporučená literatura:

Koutková, H., Moll, I.: *Základy pravděpodobnosti*. CERM, Brno, 2011.

Koutková, H.: Modul M03, *Základy teorie odhadu*. CERM, Brno, 2007.

Koutková, H.: Modul M04, *Základy testování hypotéz*. CERM, Brno, 2007.

Koutková, H., Dlouhý, O.: *Sbírka úloh z pravděpodobnosti a matematické statistiky*. CERM, Brno, 2017.

Anděl, J.: *Statistické metody*. MatfyzPress, Praha, 1998.

Zkouška

Semestrální zkouška je písemná. Každý student během 90 minut řeší tři příklady z okruhů níže, přičemž z okruhu I. a II. bude do zadání zkoušky vybrán vždy alespoň jeden příklad. Písemná část může být následována doplňujícími základními otázkami vycházejících z přednášek a cvičení. Výsledné hodnocení je dáno klasifikační stupnicí ECTS podle Studijního a zkušebního řádu VUT (100–90 bodů: A, 80–89 bodů: B, 70–79 bodů: C, 60–69 bodů: D, 50–59 bodů: E, 0–49 bodů: F).

Okruhy ke zkoušce.

I. Teorie pravděpodobnosti

- (a) Funkční a číselné charakteristiky náhodných veličin a dvourozměrného diskrétního náhodného vektoru, výpočet pravděpodobnosti, marginální rozdělení, nezávislost náhodných veličin.
- (b) Výpočet pravděpodobnosti a charakteristik v případě speciální zákonů rozdělení (Bi, Hg, Po, N).

II. Matematická statistika

- (a) Bodové a intervalové odhady parametrů rozdělení.
- (b) Testování hypotéz (jednovýběrové a dvouvýběrové testy o parametrech a χ^2 test dobré shody).

Student má povinnost prokázat svou totožnost u zkoušky ISIC kartou, případně jiným platným dokladem totožnosti. V jiném případě může být ze zkoušky vyloučen.

Každý student si s sebou **přinese**:

- psací potřeby,
- kalkulačku,
- 3 čisté listy formátu A4 nerozebíratelně sešité sponkou.

U zkoušky **nejsou povoleny**:

- žádné písemně zpracované pomůcky; statistické tabulky a vybrané základní vzorce donese na písemku zkoušející,
- elektronická zařízení vyjma kalkulaček, zejména nesmí mít student v dosahu mobilní telefon nebo jiné výpočetní či komunikační zařízení,
- volné papíry.

Věci osobní potřeby studenta budou uloženy na místech určených osobou provádějící dozor u zkoušky.

Ukázkový zkouškový test č. 1.

Příklad 1. Náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & -1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) konstantu $c \in \mathbb{R}$;
- (b) distribuční funkci $F(x)$;
- (c) střední hodnotu $E(5 - 2X)$ a $P(-0.5 < X < 1)$;
- (d) hustotu načrtněte a určete modus veličiny X .

Příklad 2. V určitém úseku vodního toku byl u několika ryb stejného druhu a srovnatelného stáří stanoven obsah methylrtuti (v $\mu\text{g/kg}$) v kůži:

57 55 67 74 73 44 58 39 40 57 80 46 63 54 71

Předpokládejte, že obsah methylrtuti je náhodná veličina s normálním rozdělením.

- (a) Určete realizace nejlepšího nestranného konzistentního bodového odhad střední hodnoty a rozptylu obsahu methylrtuti.
- (b) Určete realizaci 95% intervalu spolehlivosti průměrného obsahu methylrtuti.
- (c) Na hladině významnosti 0.05 otestujte, zda se průměrný obsah methylrtuti statisticky významně liší od hodnoty $53 \mu\text{g/kg}$.

Příklad 3. V osudí je 12 bílých a 20 černých koulí. Opakovaně nezávisle vytáhneme z osudí po jedné kouli, přičemž vždy zaznamenáme barvu vytažené koule a před dalším tahem ji vrátíme zpět do osudí. Takto provádíme 10 tahů. Určete:

- (a) rozdělení pravděpodobnosti počtu vytažených černých koulí, запиšte pravděpodobnostní funkci;
- (b) pravděpodobnost, že přesně polovina vytažených koulí budou černé koule.
- (c) Úkoly (a) a (b) zopakujte za předpokladu, že vytažené koule do osudí nevracíme.

Ukázkový zkouškový test č. 2.

Příklad 1. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 0.2, & -1 \leq x < 0, \\ 0.34, & 0 \leq x < 1, \\ 0.7, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x. \end{cases}$$

Určete:

- (a) pravděpodobnostní funkci $p(x)$ a nakreslete její graf;
- (b) $P(X \geq 1)$, $P(0 < X < 2)$;
- (c) rozptyl veličiny $Y = 3 - 2X$;
- (d) modus náhodné veličiny X .

Příklad 2. Předpokládejte, že brzdná dráha automobilu při rychlosti 60 km/h má normální rozdělení se střední hodnotou 20.2 m a směrodatnou odchylkou 1.4 m. Určete:

- (a) pravděpodobnost, že při jednom pokusu bude brzdná dráha větší než 19 m.

Pokus $20 \times$ nezávisle opakujeme, přičemž sledujeme počet případů Y , kdy byla brzdná dráha větší než 19 m.

- (b) Zapište pravděpodobnostní funkci veličiny Y ;
- (c) určete střední hodnotu a rozptyl veličiny Y ;
- (d) určete pravděpodobnost, že brzdná dráha bude větší než 19 m v alespoň 2 případech.

Příklad 3. Výsledky hodnocení zkoušek určitého předmětu jsou v tabulce níže. Na hladině významnosti 0.05 ověřte, zda lze hodnocení A považovat za hodnocení s dvakrát vyšší četností oproti jiným hodnocením.

hodnocení	A	B	C	D	E	F
četnost	28	20	17	18	21	16

Jak by se modifikoval test, kdybychom chtěli ověřit hypotézu, že průměrně zkoušku nesloží 10 % studentů? (Naznačte tabulku a pravděpodobnosti, dále nepočítejte.)

Ukázkový zkouškový test č. 3.

Příklad 1. Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ A \left(1 - \frac{1}{x^2}\right), & 1 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Určete:

- (a) konstantu $A \in \mathbb{R}$;
- (b) hustotu $f(x)$;
- (c) střední hodnotu $E(5 - 2X)$ a $P(-0.5 < X < 1)$;
- (d) modus a 95% kvantil veličiny X .

Příklad 2. Byla sledována koncentrace $[\text{ng}/\text{m}^3]$ určité škodlivé látky v ovzduší, a to celkem ve 10 různých lokalitách. V každé lokalitě byla přitom vždy zjištěna koncentrace uvnitř a vně budovy. Získaly se hodnoty:

č. lokality	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
koncentrace uvnitř	8	12	15	17	18	18	23	25	26	28
koncentrace vně	38	47	56	32	29	41	12	58	39	47

Předpokládejte, že se jedná o náhodné výběry z normálního rozdělení.

- (i) Určete nejlepší nestranný konzistentní bodový odhad střední hodnoty a rozptylu koncentrace uvnitř budovy.
- (ii) Určete 99% interval spolehlivosti rozptylu koncentrace uvnitř budovy.
- (iii) S využitím odhadů parametrů rozdělení určete pravděpodobnost, že v jedné náhodně vybrané lokalitě překročí koncentrace uvnitř budovy hodnotu $40 \text{ ng}/\text{m}^3$.
- (iv) Na hladině významnosti 0.05 proveďte test hypotézy, zda se koncentrace uvnitř a vně budovy významně liší.

Příklad 3. Na vysokou školu podalo přihlášku celkem 380 žáků učilišť, přičemž z nich bylo přijato 125.

- (a) Určete bodový a 95% intervalový odhad podílu žáků přijatých na VŠ.
- (b) Na hladině významnosti 0.01 ověřte hypotézu, že podíl přijatých žáků učilišť překračuje 30 %.

Ukázkový zkouškový test č. 4.

Příklad 1. Náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$p(x) = \begin{cases} c \cdot 3^{2-x}, & x = 0, 1, 2, 3, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) konstantu $c \in \mathbb{R}$;
- (b) distribuční funkci $F(x)$ a nakreslete její graf;
- (c) rozptyl veličiny $Y = 4 - X^2$;
- (d) $P(X \geq 1.5)$ a modus veličiny X .

Příklad 2. V cementárně byla provedena kontrola dvou dávkovačů cementu. Bylo náhodně vybráno několik pytlů cementu z prvního i druhého dávkovače a získaly se hmotnosti [kg]:

první dávkovač		25.05	24.90	25.08	25.02	24.95	25.12	25.07	24.94
druhý dávkovač		25.03	24.85	24.91	24.98	25.04	24.89		

Předpokládejte, že se jedná o náhodné výběry z normálního rozdělení.

- (a) Určete nestranné bodové odhady středních hodnot a rozptylů hmotností pro jednotlivé dávkovače.
- (b) Na hladině významnosti 0.05 ověřte shodu rozptylů hmotností obou dávkovačů.
- (c) Na hladině významnosti 0.05 ověřte, zda první dávkovač dávkuje pytle o hmotnosti statisticky významně větší než dávkovač druhý.

Příklad 3. U několika zahradních sekaček stejného typu se sledoval počet závad, které se objevily během záruční doby. Na hladině významnosti 0.05 ověřte, zda lze počet závad považovat za realizaci náhodného výběru z Poissonova rozdělení se střední hodnotou $\lambda = 0.5$.

počet závad		0	1	2	3	4 a více
četnost		38	11	6	3	2