FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA001 Matematika 1

Informace ke zkoušce

Přednášky

1. Reálná funkce jedné reálné proměnné, explicitní a parametrické zadání funkce. Složená a inverzní funkce.

2. Některé elementární funkce, cyklometrické funkce. Hyperbolické funkce. Polynom a jeho základní kořenové vlastnosti, rozklad polynomu v reálném oboru.

3. Racionální funkce. Posloupnost a její limita.

4. Limita a spojitost funkce, základní věty. Derivace funkce, její geometrický a fyzikální význam, pravidla pro derivování.

5. Derivace složené a inverzní funkce. Diferenciál funkce. Rolleova a Lagrangeova věta.

6. Derivace vyšších řádů, diferenciály vyšších řádů. Taylorova věta.

7. L'Hospitalovo pravidlo. Asymptoty grafu funkce. Průběh funkce.

8. Základy maticového počtu, elementární úpravy matice, hodnost matice. Řešení soustav lineárních algebraických rovnic Gaussovou eliminační metodou.

9. Determinanty druhého řádu. Definice determinantů vyšších řádů pomocí Laplaceova rozvoje. Pravidla pro počítání s determinanty. Cramerovo pravidlo pro řešení systému lineárních algebraických rovnic.

10. Inverzní matice. Jordanova metoda výpočtu. Maticové rovnice. Reálný lineární prostor, báze a dimenze lineárního prostoru. Lineární prostory aritmetických a geometrických vektorů.

11. Vlastní čísla a vektory matice. Souřadnice vektoru. Skalární a vektorový součin vektorů, počítání v souřadnicích.

12. Smíšený součin vektorů. Rovina v $\mathbb{E}_3$. Přímka v $\mathbb{E}_3$, úlohy polohy.

13. Úlohy metrické v $\mathbb{E}_3$. Plochy v $\mathbb{E}_3$.

Semestrální zkouška

- ▷ Je písemná;
- ▷ trvá 90 minut;
- ▷ každý student řeší 3 velké příklady a 2 otázky (2 malé příklady) (max 100b= 75b+15b);
- ▷ velké příklady budou vybrané tak, aby z okruhu témat příkladů skupiny I, II uvedených níže byl zařazen alespoň jeden příklad (zkoušející učitel může úlohy doplnit či modifikovat);
- ▷ malé příklady se týkají veškeré látky probírané během semestru včetně numeriky (Grafická metoda u řešení nelineárních rovnic, Interpolační polynom – Lagrangeův a Newtonův tvar, LU-rozklad matice, Řešení přeurčených soustav lineárních algebraických rovnic metodou nejmenších čtverců);
- ▷ každý student má povinnost prokázat u zkoušky svoji identitu platným Identifikačním průkazem studenta (lze nahradit i jiným platným dokladem opatřeným fotografií);
- ▷ každý student si přinese psací potřeby a 4 čisté listy kancelářského papíru formátu A4 napevno sešité sponkou (sešívačkou, nikoliv dopisovou sponou), podepíše si je, volné listy papírů nejsou povoleny;
- ▷ nejsou povoleny mobilní telefony, žádné písemně zpracované pomůcky, kalkulačky ani jiné technické výpočetní a grafické prostředky, studenti, kteří toto poruší, budou ze zkoušky vyloučeni a hodnoceni známkou F;
- ▷ osobní potřeby studenta budou uloženy na místech určených učitelem provádějícím dozor u zkoušky;
- ▷ semestrální zkouška studenta je úspěšná, když součet bodů z písemného zkoušení (max. 100b) je alespoň 50b podle tabulky Studijního a zkušebního řádu VUT.

Studenti mají k dispozici generátor základních typů zkouškových příkladů na adrese https://math.fce.vutbr.cz/baa001/ (nové zadání – reload stránky).

Okruhy témat k závěrečné zkoušce z předmětů BAA001

I. Funkce jedné reálné proměnné a její diferenciální počet

1. Znaménko a definiční obor racionální funkce.
2. Rozklad racionální funkce v součet polynomu a parciálních zlomků.
3. Průběh funkce.
4. Rovnice tečny a normály složené funkce.
5. Derivace složené funkce včetně úpravy výsledku.
6. Taylorův polynom v bodě x_0, Maclaurinův polynom.

II. Lineární algebra, vektorový počet, základy analytické geometrie v prostoru $\mathbb{E}_3$

1. Řešení soustavy lineárních algebraických rovnic (dále SLAR) Gaussovou eliminační metodou.
2. Řešení maticových rovnic užitím inverze matic.
3. Určení vlastních čísel a vlastních vektorů matice.
4. Úlohy na prostorový trojúhelník (délky stran, délky výšek, velikosti úhlů při vrcholech, plošný obsah).
5. Výpočet obsahu rovnoběžníku určeného dvojicí nekolineárních vektorů a nalezení vektoru s danou vlastností kolmého k zadaným vektorům v ortonormální bázi.
6. Výpočet objemu a výšky rovnoběžnostěnu/čtyřstěnu určeného trojicí nekomplanárních vektorů v ortonormální bázi, výpočet délky výšky rovnoběžnostěnu na danou stěnu.
7. Kolmý průmět bodu M do roviny $\rho = \rho(A, B, C)$, vzdálenost bodu od roviny.
8. Kolmý průmět bodu M na přímku p, vzdálenost bodu od přímky.
9. Vzájemná poloha dvou přímek:
   - pokud jsou rovnoběžné, určit jejich vzdálenost,
   - pokud jsou různoběžné, určit jejich průsečík a úhel,
   - pokud jsou mimoběžné, určit jejich nejkratší vzdálenost.

BAA001 – ukázková písemná práce

1. Máme následující funkci: $f(x) = \dfrac{8}{4 - x^2}$. [30b]
   Najděte:
   a) definiční obor funkce, znaménko funkce;
   b) sudost, lichost; průsečíky grafu funkce se souřadnicovými osami;
   c) intervaly monotonie, lokální extrémy, pokud existují, vypočítejte funkční hodnoty;
   d) konvexnost, konkávnost, inflexní body, pokud existují, vypočítejte funkční hodnoty;
   e) asymptoty grafu funkce;
   f) graf zadané funkce.

2. Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu rovnic a pomocí Frobeniovy věty zdůvodněte existenci a počet řešení. [30b]

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 3u & = & 5 \\ 2x & - & y & + & z & - & 2u & = & 0 \\ x & - & 3y & + & 2z & - & 5u & = & -5 \\ 3x & - & 4y & + & 3z & - & 7u & = & -5 \end{array}$$

3. Jsou dány body $A[-2, 1, 2]$, $B[3, 3, 0]$ a přímka $q \equiv \{x = 7 + 5t,\ y = -3 + 2t,\ z = 4-2t\}$. Ověřte, že přímky $p = [AB]$ a q jsou rovnoběžné a určete jejich vzdálenost. [25b]

4. a) Uveďte, kdy lze násobit matice, a vlastnosti výsledné matice?
   b) Lze násobit matice $A \cdot B$ a $C \cdot D$? Pouze zdůvodněte bez výpočtu. [8b]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

5. Napište obecný tvar rozkladu funkce f na parciální zlomky. [7b]

$$f(x) = \frac{3x+2}{x(1-x)^3(x^2+2)^2(x+5)}$$

BAA001 – ukázková písemná práce

1. Najděte Maclaurinův polynom 5. stupně funkce: [30b]

$$f(x) = x \cdot \ln(x+1).$$

2. Určete všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matice [30b]

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Jsou dány body $A = [1, 3, -2]$, $B = [4, -1, -3]$, $C = [-1, 1, -3]$. Určete: [25b]

   a) obecnou rovnici roviny $\rho = (A, B, C)$,

   b) obsah trojúhelníku ABC,

   c) délku strany $a = BC$,

   d) délku výšky v_a,

   e) vektor $\vec{x} = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ kolmý k vektorům $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ takový, že $x_1 + x_2 + x_3 = 7$.

4. a) Uveďte Cramerovo pravidlo pro soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

   b) Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavu rovnic. [8b]

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & = & 2 \end{array}$$

5. a) Rovnici $x^3 + \ln x = 0$ řešte pomocí grafické metody, odhadněte počet kořenů a určete intervaly, ve kterých tyto kořeny leží.

   b) Určete definiční obory funkcí $y = x^3$ a $y = \ln x$. [7b]

BAA001 – ukázková písemná práce

1. Určete první derivaci funkce $f(x)$, výsledek upravte. [30b]

$$f(x) = x \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctan} \sqrt{x} - \sqrt{x}.$$

2. Rozložte funkci $f(x)$ v součet polynomu s parciálními zlomky. [30b]

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + x + 3}{x^3 - x^2 + 2x - 2}$$

3. Pomocí inverzní matice řešte maticovou rovnici. [25b]

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Určete objem čtyřstěnu určeného vektory $\vec{a} = (2,\ 1,\ 4)$, $\vec{b} = (3,\ 1,\ 9)$, $\vec{c} = (5,\ 1,\ 25)$. [8b]

5. Najděte Newtonův interpolační polynom funkce f užitím hodnot $y_i = f(x_i)$ z tabulky v uzlech x_i z tabulky: [7b]

i	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3
y_i	-1	4	5	2

Irena Hinterleitner
garant předmětu