

# Informace ke zkoušce z předmětu BAA004 (Matematika 4)

## Harmonogram přednášek

1. Diskrétní a spojitá náhodná veličina, náhodný vektor. Pravděpodobnost.
2. Vlastnosti pravděpodobnosti. Distribuční funkce a její vlastnosti.
3. Vztahy mezi funkčními charakteristikami. Marginální náhodný vektor, nezávislé náhodné veličiny.
4. Číselné charakteristiky náhodných veličin: střední hodnota, rozptyl, směrodatná odchylka, modus a kvantily. Pravidla pro výpočet střední hodnoty a rozptylu.
5. Číselné charakteristiky náhodných vektorů: kovariance a korelační koeficient.
6. Vybraná rozdělení pravděpodobnosti diskrétní náhodné veličiny a jejich použití: klasické, alternativní, binomické, Poissonovo, hypergeometrické.
7. Vybraná rozdělení pravděpodobnosti spojitě náhodné veličiny a jejich použití: rovnoměrné, exponenciální, normální.
8.  $\chi^2$  rozdělení, Studentovo rozdělení - jejich odvození a použití. Náhodný výběr, realizace náhodného výběru a výběrové statistiky.
9. Rozdělení výběrových statistik. Bodové odhady parametrů rozdělení, jejich realizace a vlastnosti: nestrannost, konzistence, nejlepší nestranný odhad.
10. Intervalové odhady parametrů rozdělení.
11. Testování statistických hypotéz: princip, testy parametrů normálního rozdělení, asymptotický test parametru alternativního rozdělení.
12. Testy dobré shody: Pearsonův  $\chi^2$  test. Základní pojmy regresní analýzy.
13. Lineární model.

## Literatura

Základní literatura k předmětu je tvořena skripty FAST:

- [1] Koutková, H., Moll, I.: *Základy pravděpodobnosti*. CERM, Brno, 2011.
- [2] Koutková, H.: Modul M03, *Základy teorie odhadu*. CERM, Brno, 2007.
- [3] Koutková, H.: Modul M04, *Základy testování hypotéz*. CERM, Brno, 2007.
- [4] Koutková, H., Dlouhý, O.: *Sbírka úloh z pravděpodobnosti a matematické statistiky*. CERM, Brno, 2017.

Další doporučená literatura:

- [1] Anděl, J.: *Statistické metody*. MetFyzPress, Praha, 1998.
- [2] Neubauer, J., Sedlačík, M., Kríž, O.: *Základy statistiky. Aplikace v technických a ekonomických oborech*. Grada, Praha, 2012.

## Zkouška

Semestrální zkouška je písemná. Každý student během 90 minut řeší tři příklady z okruhů níže, přičemž z okruhu I. a II. bude do zadání zkoušky vybrán vždy alespoň jeden příklad. Výsledné hodnocení je dáno klasifikační stupnicí ECTS podle Studijního a zkušebního řádu VUT (100–90 bodů: A, 80–89 bodů: B, 70–79 bodů: C, 60–69 bodů: D, 50–59 bodů: E, 0–49 bodů: F).

### Okruhy ke zkoušce.

#### I. Teorie pravděpodobnosti

- (a) Funkční charakteristiky (distribuční a pravděpodobnostní funkce, hustota), výpočet pravděpodobnosti, marginální rozdělení, nezávislost náhodných veličin, číselné charakteristiky náhodných veličin a vektorů, transformace náhodných veličin.
- (b) Výpočet pravděpodobnosti v případě speciálních zákonů rozdělení.

#### II. Matematická statistika

- (a) Bodové a intervalové odhady parametrů rozdělení.
- (b) Testování hypotéz (testy o parametrech a test dobré shody).

Student má povinnost prokázat svou totožnost u zkoušky ISIC kartou, případně jiným platným dokladem totožnosti. V jiném případě může být ze zkoušky vyloučen.

Každý student si s sebou **přinese**:

- psací potřeby,
- kalkulačku,
- 3 čisté listy formátu A4 nerozebíratelně sešité sponkou.

U zkoušky **nejsou povoleny**:

- žádné písemně zpracované pomůcky; statistické tabulky a vybrané základní vzorce donese na písemku zkoušející,
- elektronická zařízení vyjma kalkulaček, zejména nesmí mít student v dosahu mobilní telefon nebo jiné výpočetní či komunikační zařízení,
- volné papíry.

Věci osobní potřeby studenta budou uloženy na místech určených osobou provádějící dozor u zkoušky.

## Ukázkový zkouškový test č. 1.

**Příklad 1.** Náhodná veličina  $X$  má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{x}{4}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete:

- (a) konstantu  $c \in \mathbb{R}$ ;
- (b) distribuční funkci  $F(x)$ ;
- (c) střední hodnotu  $E(5 - 2X)$  a  $P(-0.5 < X < 1)$ ;
- (d) hustotu načrtněte a určete modus veličiny  $X$ .

**Příklad 2.** V určitém úseku vodního toku byl u několika ryb stejného druhu a srovnatelného stáří stanoven obsah methylrtuti (v  $\mu\text{g}/\text{kg}$ ) v kůži:

57 55 67 74 73 44 58 39 40 57 80 46 63 54 71

Předpokládejte, že obsah methylrtuti je náhodná veličina s normálním rozdělením.

- (a) Určete realizace nejlepšího nestranného konzistentního bodového odhad střední hodnoty a rozptylu obsahu methylrtuti.
- (b) Určete realizaci 95% intervalu spolehlivosti průměrného obsahu methylrtuti.
- (c) Na hladině významnosti 0.05 otestujte, zda se průměrný obsah methylrtuti statisticky významně liší od hodnoty  $53 \mu\text{g}/\text{kg}$ .

**Příklad 3.** V osudí je 12 bílých a 20 černých koulí. Opakovaně nezávisle vytáhneme z osudí po jedné kouli, přičemž vždy zaznamenáme barvu vytažené koule a před dalším tahem ji vrátíme zpět do osudí. Takto provádíme 10 tahů. Určete:

- (a) rozdělení pravděpodobnosti počtu vytažených černých koulí, запиšte pravděpodobnostní funkci;
- (b) pravděpodobnost, že přesně polovina vytažených koulí budou černé koule.
- (c) Úkoly (a) a (b) zopakujte za předpokladu, že vytažené koule do osudí nevracíme.

## Ukázkový zkouškový test č. 2.

**Příklad 1.** Náhodná veličina  $X$  má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 0.2, & -1 \leq x < 0, \\ 0.34, & 0 \leq x < 1, \\ 0.7, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x. \end{cases}$$

Určete:

- (a) pravděpodobnostní funkci  $p(x)$  a nakreslete její graf;
- (b)  $P(X \geq 1)$ ,  $P(0 < X < 2)$ ;
- (c) rozptyl veličiny  $Y = 3 - 2X$ ;
- (d) modus náhodné veličiny  $X$ .

**Příklad 2.** Předpokládejte, že brzdná dráha automobilu při rychlosti 60 km/h má normální rozdělení se střední hodnotou 20.2 m a směrodatnou odchylkou 1.4 m. Určete:

- (a) pravděpodobnost, že při jednom pokusu bude brzdná dráha větší než 19 m.

Pokus  $20 \times$  nezávisle opakujeme, přičemž sledujeme počet případů  $Y$ , kdy byla brzdná dráha větší než 19 m.

- (b) Zapište pravděpodobnostní funkci veličiny  $Y$ ;
- (c) určete střední hodnotu a rozptyl veličiny  $Y$ ;
- (d) určete pravděpodobnost, že brzdná dráha bude větší než 19 m v alespoň 2 případech.

**Příklad 3.** Výsledky hodnocení zkoušek určitého předmětu jsou v tabulce níže. Na hladině významnosti 0.05 ověřte, zda lze hodnocení A považovat za hodnocení s dvakrát vyšší četností oproti jiným hodnocením.

hodnocení	A	B	C	D	E	F
četnost	28	20	17	18	21	16

Jak by se modifikoval test, kdybychom chtěli ověřit hypotézu, že průměrně zkoušku nesloží 10 % studentů? (Naznačte tabulku a pravděpodobnosti, dále nepočítejte.)