



**BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY**

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

**FAKULTA STAVEBNÍ**

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

**ÚSTAV MATEMATIKY A DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE**

INSTITUTE OF MATHEMATICS AND DESCRIPTIVE GEOMETRY

# **TECHNICKÉ OSVĚTLENÍ**

**AUTOR**  
AUTHOR

**Mgr. et Mgr. Jan Šafařík, Ph.D.**

**BRNO 2022**

Tento studijní materiál byl zpracován v rámci projektu *Multimediální podpora studia matematiky a deskriptivní geometrie na FAST VUT v Brně*.

© Jan Šafařík 2022, 2. vydání

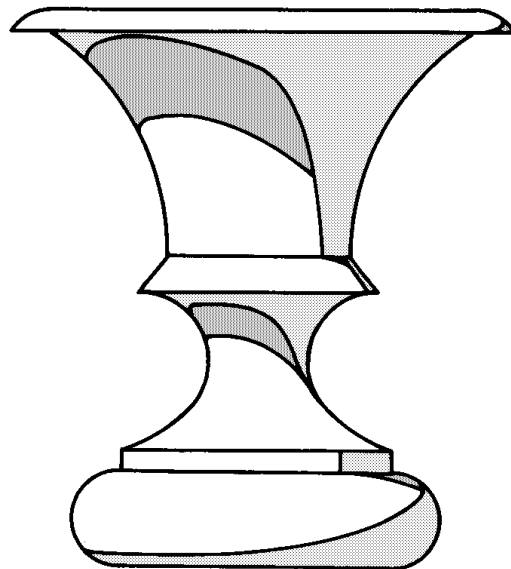
Jan Šafařík  
Ústav matematiky a deskriptivní geometrie  
Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně  
Žižkova 17, 602 00 Brno  
safarik.j@fce.vutbr.cz  
<http://vyuka.safarikovi.org/>



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Základní pojmy</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Úvod do technického osvětlení</b>	<b>5</b>
3.1	Zobrazení stínu bodu . . . . .	6
3.2	Redukční úhel . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Základní konstrukce</b>	<b>8</b>
4.1	Kružnice, kruh . . . . .	8
4.2	Pilletova rovina . . . . .	8
4.3	Rotační válec . . . . .	10
4.4	Kuželová plocha . . . . .	10
4.5	Kulová plocha . . . . .	11
4.6	Anuloid (kruhový prstenec) . . . . .	13
4.6.1	Vnější část anuloidu . . . . .	13
4.6.2	Vnitřní část anuloidu . . . . .	14
4.7	Obecná rotační plocha . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Vržené stíny hranolu na tělesa</b>	<b>16</b>
5.1	Dva sousední hranoly . . . . .	16
5.2	Hranol a rotační válcová plocha . . . . .	16
5.3	Hranol a rotační kužel . . . . .	17
5.4	Hranol a anuloid . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Vržené stíny vodorovné kružnice na tělesa</b>	<b>20</b>
6.1	Vržený stín vodorovné kružnice na vodorovnou kružnici . . . . .	20
6.2	Dva sousední rotační válce . . . . .	21
6.3	Vržený stín vodorovné kružnice na vnitřní dutinu válce . . . . .	22
6.4	Vržený stín na anuloid . . . . .	23
6.4.1	Vržený stín kružnice na vnitřní část anuloidu . . . . .	23
6.4.2	Vržený stín anuloidu na Pilletovu rovinu . . . . .	25
6.4.3	Vržený stín kružnice na vnější část anuloidu . . . . .	26
6.5	Osvětlení výklenku (niky) . . . . .	27
6.6	Osvětlení skupiny těles - praktický příklad . . . . .	28
<b>7</b>	<b>Rotační tělesa s vodorovnou osou</b>	<b>31</b>
<b>8</b>	<b>Vržený stín na šikmou rovinu</b>	<b>32</b>
8.1	Osvětlení střech . . . . .	32
8.2	Vržený stín věžičky . . . . .	33
8.3	Vržený stín válcového komínu . . . . .	33

<b>9 Osvětlení schodišť</b>	<b>35</b>
<b>10 Technické osvětlení v zobrazovacích metodách</b>	<b>36</b>
10.1 Kolmé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny . . . . .	36
10.2 Axonometrické promítání . . . . .	38
10.3 Lineární perspektiva . . . . .	42
<b>11 Užití technického osvětlení</b>	<b>45</b>



# 1 Úvod

Mezi základní podmínky kladené na různé zobrazovací metody v deskriptivní geometrii patří měřitelnost a názornost. V mnohých případech se však setkáváme s průměty útvarů, které nejsou dostatečně názorné. Abychom alespoň částečně tento nedostatek odstranili, zobrazujeme jednotlivé předměty i s jejich osvětlením. Jsou-li útvary doplněné o své osvětlení, působí na nás přirozenějším dojmem, neboť vše, co kolem sebe pozorujeme, je osvětlené. Ze správně sestrojeného osvětlení se dají navíc vyčíst různé údaje o zobrazovaném útvaru, neboť například vyšší útvary vrhají delší stíny atd.

Tato práce se zabývá tzv. *technickým osvětlením*, což je jeden ze způsobů osvětlování, který se v současné technické praxi používá nejčastěji. Nauka o technickém osvětlení náležela od dávných dob do látky probírané v deskriptivní geometrii jako příklad použití geometrie v praxi.

V kapitole 3. a 4. se seznámíme se základními principy a vlastnostmi technického osvětlení. V následujících kapitolách si pak ukážeme sestrojování stínů skupin těles o společné ose. S konstrukcí vržených stínů na šikmou rovinu se seznámíme v kapitole 8. V 10. kapitole si přiblížíme konstrukce stínů v jednotlivých zobrazovacích metodách ( *Mongeovo promítání, axonometrické promítání a lineární perspektiva* ). V poslední 11. kapitole se zmíníme o využití technického osvětlení v současné stavební a architektonické praxi.

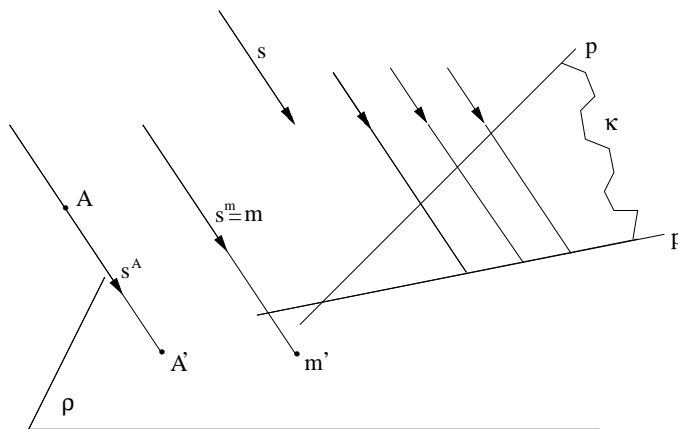
Tento text předpokládá znalost Mongeovy projekce, axonometrického promítání, lineární perspektivy a osových afinity.

Technické osvětlení je konstruktivně jednoduché, výsledky jsou i pro laika snadno představitelné a jeho metoda je dobrým cvičením v aplikování deskriptivní geometrie.

## 2 Základní pojmy

Hlavní význam osvětlování útvarů spočívá v tom, že zvyšuje názornost jejich průmětů. Chceme-li, aby konstrukce byly co nejjednodušší, předpokládáme, že světelné paprsky jsou paprsky geometrické, že tělesa a plochy, které osvětlujeme, jsou neprůhledné, absolutně černé a pohlcují světelné paprsky. Nenastává tedy jejich odraz. Takové osvětlení pak nazýváme **geometrální**.

Vychází-li světelné paprsky z vlastního bodu  $S$  (tvoří trs), nazývá se toto **osvětlení středové (centrální)**, jsou-li světelné paprsky navzájem rovnoběžné (se směrem  $s$ ), jedná se o tzv. **osvětlení rovnoběžné (paralelní)**. Častěji používáme rovnoběžné osvětlení, neboť se podobá osvětlení slunečními paprsky. Speciálním případem takového osvětlení se budeme zabývat v další části. V následujících úvahách předpokládáme vždy rovnoběžné osvětlení.



Obr. 1

Nechť je dána vlastní rovina  $\rho$  a směr světelných paprsků  $s$ , který není s rovinou  $\rho$  rovnoběžný. Zvolme vlastní bod  $A$  (obr. 1), který leží v témže polo-prostoru, vzhledem k dané rovině  $\rho$ , jako zdroj světla. Bodem  $A$  prochází světelný paprsek  $s^A$ , který je se směrem osvětlení rovnoběžný. Průsečík  $A'$  světelného paprsku  $s^A$  s rovinou  $\rho$  je **vrženým stínem** bodu  $A$  na rovinu  $\rho$ .

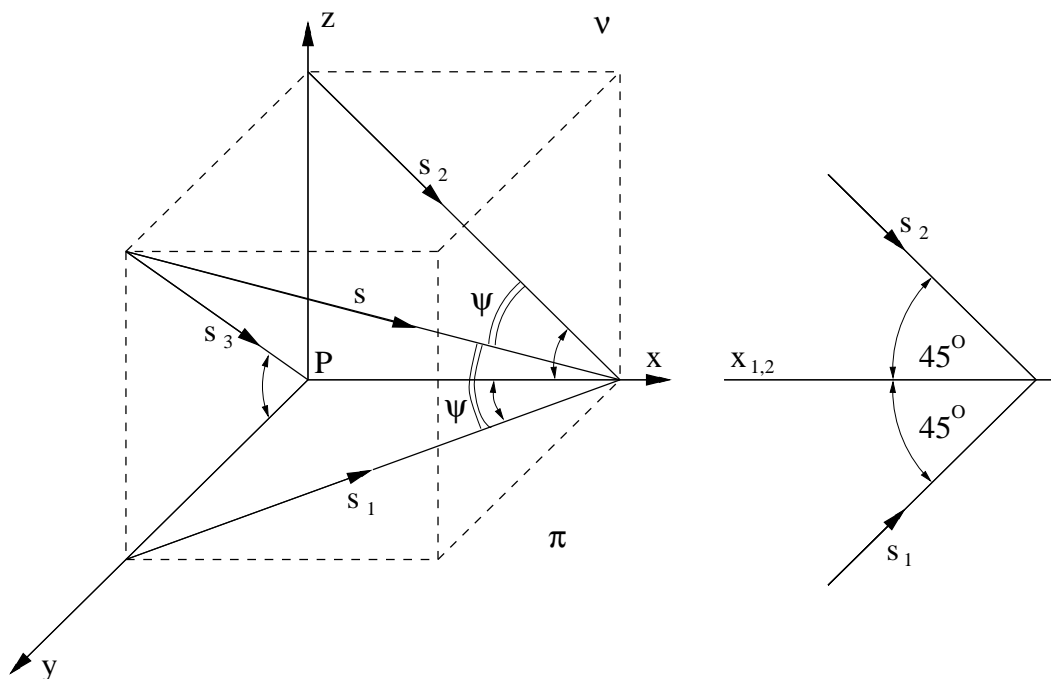
Vezmeme přímkou  $p$ , která není se světelnými paprsky rovnoběžná (obr. 1), pak světelné paprsky jejich jednotlivých bodů vytvářejí **světelnou rovinu**  $\kappa$  této přímky. Rovina  $\kappa$  je určena přímkou  $p$  a rovnoběžkou se směrem  $s$ , která je s přímkou různoběžná. Její průsečnice  $p'$  s rovinou  $\rho$  je vrženým stínem přímky  $p$  na rovinu  $\rho$ . Je-li přímka  $m$  rovnoběžná se světelnými paprsky (obr. 1), je jejím vrženým stínem na rovinu  $\rho$  bod.

**Mez vlastního stínu**  $m$  plochy (tělesa)  $\Phi$  je množina bodů dotyku jeho tečných světelných rovin, tj. tečných rovin procházejících středem osvětlení  $S$  (v našem případě je  $S$  nevlastní bod).

Vržený stín  $m'$  meze vlastního stínu  $m$  plochy (tělesa)  $\Phi$  na rovinu  $\rho$  nazýváme **mez vrženého stínu** plochy (tělesa)  $\Phi$  na rovinu  $\rho$ .

### 3 Úvod do technického osvětlení

V technické praxi se nejvíce používá zvláštního druhu rovnoběžného osvětlení, které se nazývá **technické osvětlení**. Určíme ho takto: Nechť je dán pravoúhlý souřadnicový systém o osách  $x$ ,  $y$ ,  $z$  a počátku  $P$ . Vezměme krychli, jejíž hrany leží na kladných poloosách  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Přímka  $s$ , na které leží tělesová úhlopříčka krychle, protínající osu  $x$  v bodě různém od  $P$ , udává směr technického osvětlení. Kladnou orientaci na  $s$  zvolíme od bodu v rovině os  $y$ ,  $z$  do bodu na ose  $x$  (obr. 2).



Obr. 2

Přímka  $s$  svírá se souřadnicovými rovinami úhel, pro který platí  $\operatorname{tg}\psi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , což odpovídá úhlu  $\psi \doteq 35^{\circ}15'53''$ .

Také oba průměty  $s_1$ ,  $s_2$  svírají s osou souřadnic  $x$  úhly téže velikosti  $45^{\circ}$ . Tato skutečnost má za následek zjednodušení řady konstrukcí ve srovnání s obecným rovnoběžným osvětlením. Mezi jinými umožňuje zobrazování rovnoběžného osvětlení jen v jednom pravoúhlém průmětu, zpravidla na nárýsnu  $\nu$ . Vržené stíny na  $\nu$  budeme označovat čárkou.

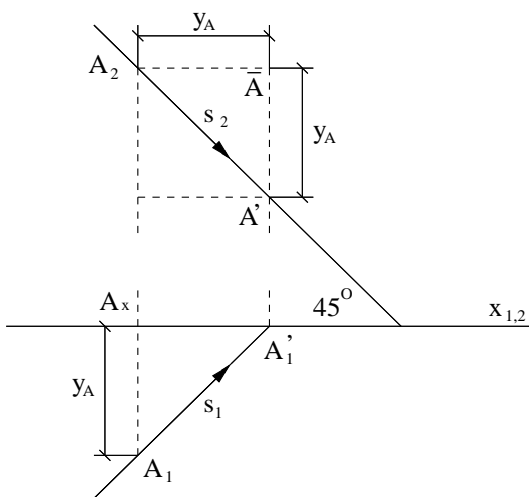
Základní konstrukce budeme zpočátku ještě odvozovat v *Mongeově promítání*, ale výsledky budeme aplikovat v promítání na jednu průmětnu.



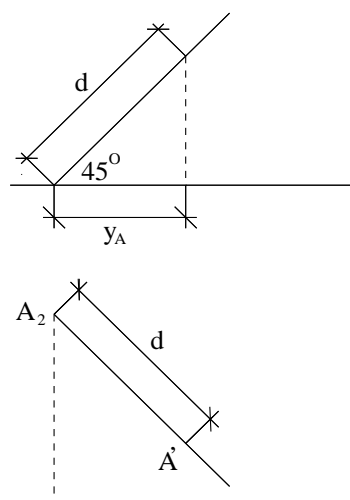
### 3.1 Zobrazení stínu bodu

Technické osvětlení bodu  $A$  na nárysnu ukazuje obrázek 3 a). Hledaný stín  $A'$  bodu  $A$  vržený na nárysnu leží v nárysném stopníku světelného paprsku  $s$  bodu  $A$ . Trojúhelníky  $A_1A_xA'_1$ ,  $A_2\bar{A}A'$  jsou shodné, pravoúhlé, rovnoramenné, o odvěsňě  $y_A$ . Z nárysu bodu  $A_2$  dostaneme přímo vržený stín  $A'$  takto: Od nárysu  $A_2$  bodu  $A$  nanese jeho souřadnici  $y_A$  nejprve vpravo do bodu  $\bar{A}$  a pak svisle dolů do bodu  $A'$ .

Určujeme-li vržené stíny více bodů, používáme redukčního úhlu velikosti  $45^\circ$  a pomocí něho stanovujeme body  $A'$  přímo (viz. obr. 3 b).

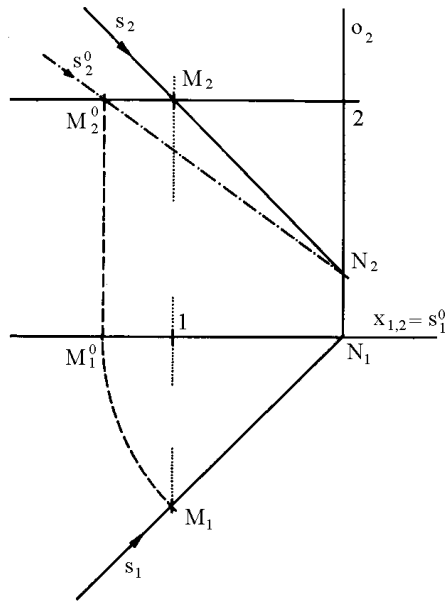


Obr. 3 a)

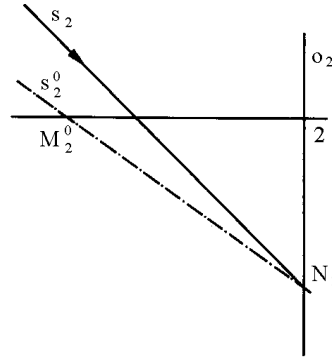


Obr. 3 b)

Při osvětlování rotačních ploch otáčíme často směr světla  $s$  kolem osy rotace plochy do průčelné polohy vzhledem k nárysně, případně přímo do náryсны, je-li osa rotace v nárysně (což bývá nejčastěji). Na obr. 4 a) v Mongeově promítání je nárysným stopníkem  $N$  přímka  $s$  proložena přímka  $o \perp \pi$  a  $s$  je kolem  $o$  otočena do náryсны do přímky  $s^0$  pomocí dalšího bodu  $M \in s$ . Jestliže označíme 1, 2 pomocné body v obr. 4 a) pak podle definice technického osvětlení dostáváme, že trojúhelníky  $N_11M_1$ ,  $N_22M_2$  jsou shodné. Z toho plyne,  $|M_2N_2| = |M_1N_1| = |N_1M_1^0| = |2M_2^0|$ , což umožňuje zjednodušenou konstrukci přímky  $s^0$  na obr 4 b).



Obr. 4 a)

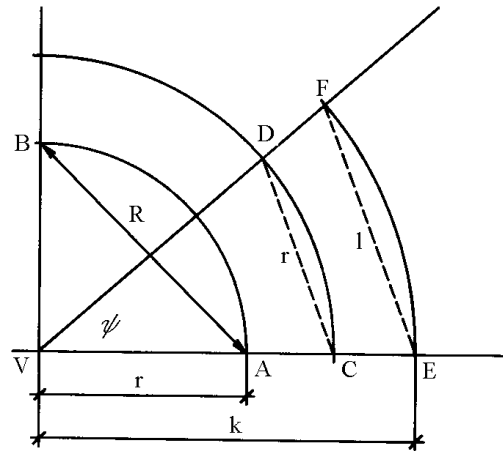


Obr. 4 b)

### 3.2 Redukční úhel

Často bude zapotřebí úsečku délky  $k = l\sqrt{2}$  zkrátit (redukovat) v poměru  $1 : \sqrt{2}$  na úsečku délky  $l$ . K tomu s výhodou použijeme **redukčního úhlu** (obr. 5): Ramena pravého úhlu  $AVB$  protne z bodu  $V$  kruhovým obloukem o poloměru  $r$  v bodech  $A$  a  $B$ . Poloměrem  $R = |AB| = r\sqrt{2}$  opišeme oblouk o středu  $V$ , který prochází bodem  $C$  na polopřímce  $VA$ . Tento oblouk protne z bodu  $C$  poloměrem  $r$  v bodě  $D$ , přímka  $VD$  je druhé rameno redukčního úhlu  $\psi$ .

Platí totiž:  $|VC| : |CD| = \sqrt{2} : 1$ . Máme-li k úsečce velikosti  $k = l\sqrt{2}$  určit úsečku velikosti  $l$ , opišeme kružnici o středu  $V$  a poloměru  $k$  a určíme průsečíky  $E, F$  s rameny redukčního úhlu (obr. 5). Pak je  $|EF| = l$ . Je vhodné, když jednou provždy tento úhel narýsuje na papír a pak při konstrukcích používáme této šablony. Jestliže se v dalším budeme zmiňovat o redukci úsečky, pak to bude vždy užitím této konstrukce.

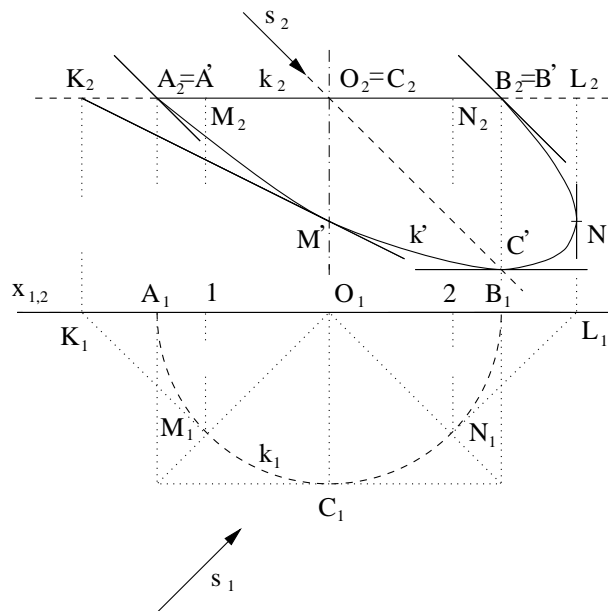


Obr. 5

## 4 Základní konstrukce

### 4.1 Kružnice, kruh

Při technickém osvětlení kružnice  $k$ , která má střed  $O$  v  $\nu$  a je rovnoběžná s  $\pi$  (obr. 6), sestrojíme několik nejdůležitějších bodů jejího eliptického stínu  $k'$  vrženého na nárysnu  $\nu$ . Body  $A, B$  leží v nárysně, proto je  $A' = A_2, B' = B_2$  a tečny v  $A', B'$  ke  $k'$  jsou rovnoběžné s přímkou  $s_2$ . Nejvzdálenějším bodem od náryсны je bod  $C$ , jeho vržený stín je podle obr. 3 a) ( $y_C$  napravo a dolů) pod bodem  $B_2$  ve vzdálenosti  $r$  v bodě  $C'$ . V bodě  $C'$  je tečna elipsy  $k'$  vodorovná a  $O_2A', O_2C'$  jsou její sdružené poloměry. Poloměry  $OM$  a  $ON$  svírají s  $\nu$  úhel  $45^\circ$ . Ze shodných, rovnoramenných, pravoúhlých trojúhelníků  $O_1M_1$  a  $K_1M_1$  plyne, že v náryse je  $|O_2M_2| = |M_2K_2| = |O_2N_2| = |N_2L_2| = r'$  rovno redukované délce poloměru  $r$  ( $r' = \frac{\sqrt{2}}{2}r = y_M = y_N$ ). Opět podle obr. 3 a) určíme vržené stíny  $M', N'$  a přímky  $K_2M', L_2N'$  jsou tečny v  $M', N'$  ke  $k'$ .



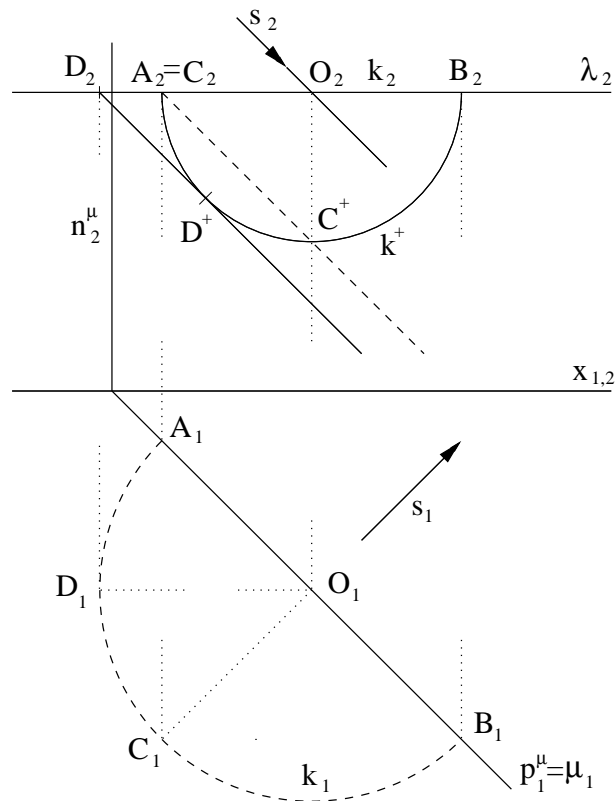
Obr. 6

### 4.2 Piletova rovina

V mnoha konstrukcích technického osvětlení se často užívá vrženého stínu na *Piletovu rovinu*<sup>1</sup>. Je to svislá rovina procházející osou rotace, která je kolmá na půdorys směru technického osvětlení  $s_1$ . Stíny na ni vržené budeme označovat  $+$ .

<sup>1</sup>**Piletova rovina** byla nazvána podle francouzského geometra **Julesa Pilleta**, který ji poprvé užil ve svém díle: *Traite de perspective linéaire précédé du tracé des ombres usuelles* (Rayons à 45 degrés), Paris 1901.

Účelnost jejího zavedení se projeví při technickém osvětlení kružnice  $k$  ležící v rovině  $\lambda \parallel \pi$  (obr. 7). Hledejme její stín  $k^+$  vržený na Piletovu rovinu  $\mu$ , která jde jejím středem  $O$ . Rovina  $\mu$  protíná  $k$  v průměru  $AB$ , k němu je sdružen průměr jdoucí bodem  $C$ . Platí  $|O_2A_2| = |O_2B_2| = r'$ , kde  $r'$  je redukovaný poloměr kružnice  $k$ . Nárýsy  $A_2, C_2$  splývají. Z obr. 7 je zřejmé, že stín  $C^+$  bodu  $C$  vržený na  $\mu$  leží pod středem  $O$  ve vzdálenosti  $r'$ . Úsečky  $O_2A_2, O_2C^+$  jsou vržené stíny sdružených poloměrů ( $|O^2A^2| = |O^2C^+| = r'$ ) a jsou proto sdružené poloměry nárýsu  $k^+$  vrženého stínu kružnice  $k$  na  $\mu$ . Z této konstrukce je patrné, že *nárýs vrženého stínu vodorovné kružnice na Piletovu rovinu je opět kružnice, avšak o redukovaném poloměru*.

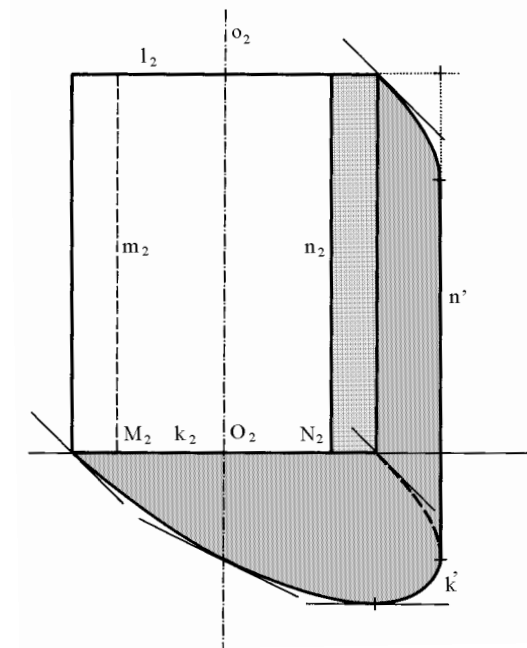


Obr. 7

V architektuře a technické praxi se zpravidla zobrazuje jen přední viditelná polovina stínu. Proto budeme v dalších příkladech volit svislou osu rotace  $o$  vždy v nárýsně a sestrojíme vlastní stín i stín vržený na nárýsnu jen pro polovinu rotační plochy ležící před nárýsnou. Na tvar vlastního stínu nemá vliv, jak osu  $o$  ( $o \perp \pi$ ) volíme, při vrženém stínu by bylo třeba jeho tvar doplnit.

### 4.3 Rotační válec

Technické osvětlení rotačního válce o svislé ose ležící v  $\nu$  nám ukazuje obr. 8. Vrženým stínem podstavné kružnice  $k$  je elipsa  $k'$ , kterou sestrojíme podle obr. 6. Meze vlastního stínu  $m_2, n_2$  leží v Piletově rovině  $\mu$ . Dále platí  $d(o_2, m_2) = d(o_2, n_2) = d(n_2, n') = r'$ , kde  $r'$  je redukovaný poloměr  $r$  rotačního válce. Nárýs  $m_2$  neviditelné meze vlastního stínu je současně nárýs maximálně osvětlené přímky položené ve *světelném meridiánu*<sup>2</sup>.



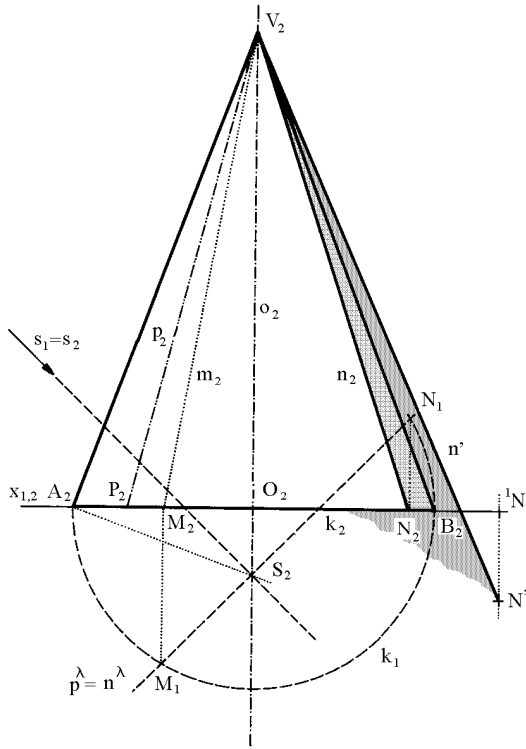
Obr. 8

### 4.4 Kuželová plocha

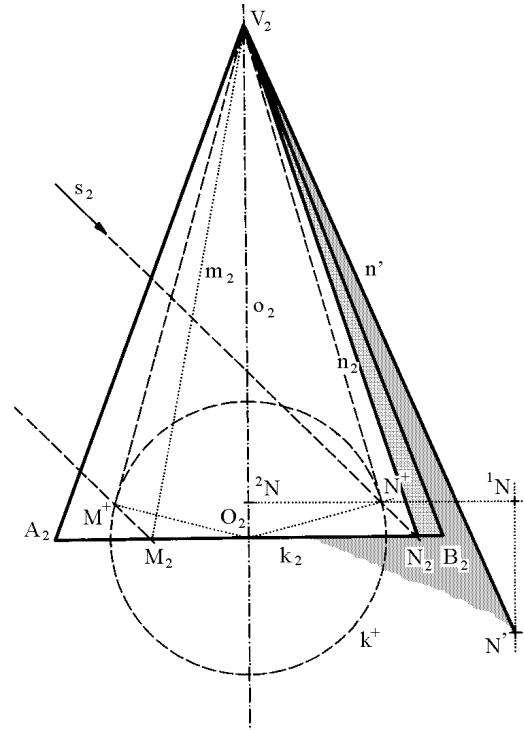
Na obrázku 9 je dána rotační kuželová plocha s osou rotace  $o$  ležící v  $\nu$ . Podstavná kružnice  $k$  leží v půdorysně  $\pi$ . Sklopíme její kladnou část nad osu  $x$ . Paprsek  $s_1$  nám splyne s nárýsem  $s_2$ . Sestrojíme kulovou plochu, která se dotýká dané kuželové plochy podél  $k$ . Střed  $S$  leží na ose  $o$ ,  $A_2S_2 \perp A_2V_2$ . Bodem  $S$  vedeme  $p^\lambda \equiv n^\lambda \perp s_2$ , které jsou půdorysnou a nárýsnou stopou roviny vlastního stínu pomocné kulové plochy. Průsečíky  $M$  a  $N$   $p^\lambda$  s  $k$  jsou žádané meze vlastního stínu daného kužele. Nanesme  $|N_1N_2| = |N_2^1N| = |^1NN'|$ .  $N'V$  je vržený stín kužele. Přímka  $PV$  ( $|O_2P_2|$  je rovna redukovanému poloměru základny  $k$ ) je maximálně osvětlená.

<sup>2</sup>Rovinnou křivku rotační plochy ležící v rovině proložené osou rotační plochy nazýváme **meridiánem** nebo též **poledníkem rotační plochy**. Meridián ležící ve světelné rovině procházející osou rotace se nazývá **světelný meridián**.

Druhý způsob nám ukazuje obr. 10. Nejdříve sestrojíme vržený stín kružnice  $k$  na Piletovu rovinu  $\mu$ : Opíšeme  $k^+$  okolo  $O_2$  redukovaným poloměrem kružnice  $k$ . Bodem  $V_2$  vedeme obě tečny ke  $k^+$ . Nárysy paprsků vedené jejich tečnými body  $s$  ke  $k^+$  vytínají na  $k_2$  nárysy bodů  $M$  a  $N$ , které jsou žádanými body meze vlastního stínu. Spád roviny  $\mu$  k druhé průmětně je jednotkový, proto je  $|^2NN^+|$  rovna vzdálenosti bodu  $N^+$  od průmětny. Nanesením  $|^2NN^+| = |N^{+1}N| = |^1NN'|$  dostáváme vržený stín bodu  $N^+$  na druhou průmětnu  $\nu$ , který je též vrženým stínem bodu  $N$ .



Obr. 9

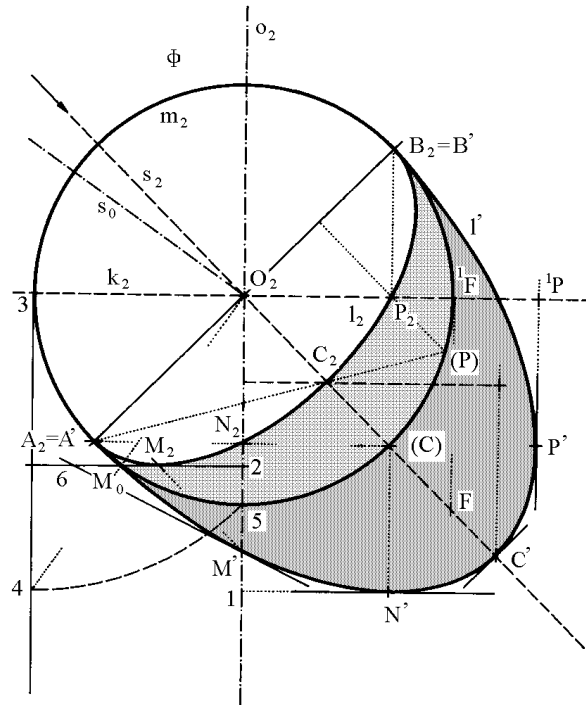


Obr. 10

### 4.5 Kulová plocha

Zvolme si kulovou plochu  $\Phi$  se středem  $O$  v nárysně  $\nu$  a poloměrem  $r$  (obr. 11). Mez vlastního stínu plochy  $\Phi$  je kružnice  $l$ , která leží v rovině procházející středem  $O$  koule kolmo na směr světla. Na obryse  $m_2$  dostáváme dva body meze vlastního stínu  $A$  a  $B$ , platí  $A_2B_2 \perp s_2$ . Podél rovníku  $k$  se dotýká kulové plochy svislý válec. Položíme-li  $|O_2P_2|$  rovnu redukovanému poloměru buď za pomoci redukčního úhlu, nebo spuštěním kolmice  $B_2P_2$  z  $B_2$  na  $k_2$ , je  $P_2$  dalším bodem meze vlastního stínu. Nárysně  $l_2$  této meze (elipsa) je souměrný podle  $s_2$ , proto i pata  $N_2$  kolmice spuštěné z  $A_2$  na  $o_2$  je dalším bodem meze  $l_2$ . Obrys  $m_2$  a  $l_2$  jsou kolmo afinní, osou afinity je průměr  $A_2B_2$ . Trojúhelníky  $O_2B_2P_2$  a  $O_2B_2(P)$ , mající své vrcholy v afinně sdružených bodech, jsou trojúhelník pravoúhlý, rovnoramenný a trojúhelník rovnostranný. Charakteristika dané afinity je rovna  $\sqrt{3} : 1$ .

Spojíme-li nyní  $(P)$  s  $A_2$ , dostaneme v průsečíku s  $s_2$  bod  $C_2$ , pro který platí  $(C)O_2 : C_2O_2 = \sqrt{3} : 1$ .  $C_2$  je proto vrcholem  $l_2$ .



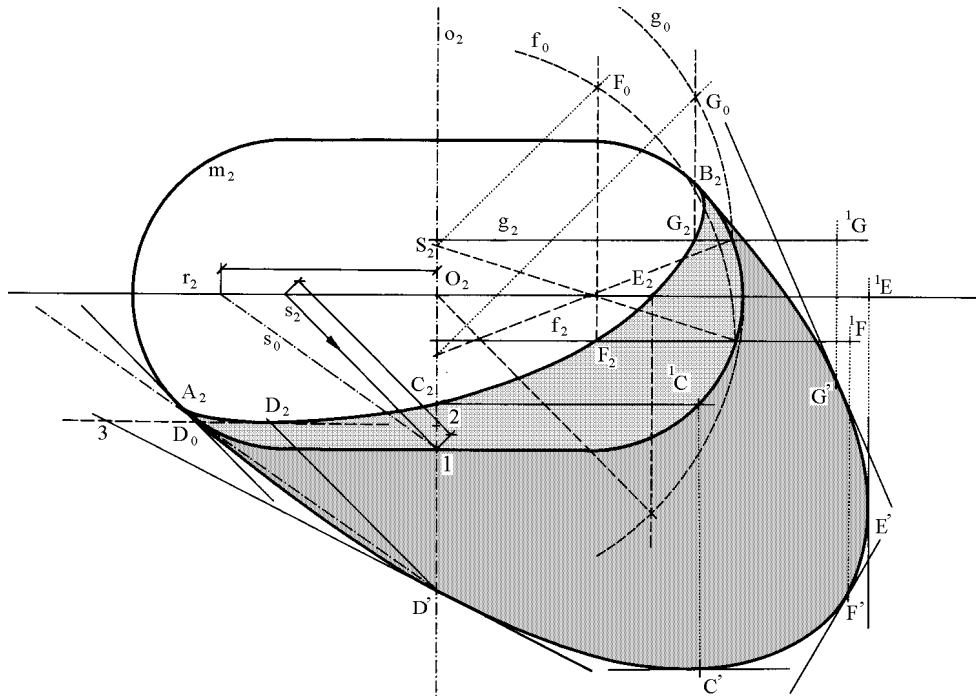
Obr. 11

Vržený stín dané kulové plochy vychází z bodů  $A_2, B_2$  ve směru  $s_2$ . Nanesením  $|O_2P_2| = |P_2^1P| = |^1PP'|$  dostaneme bod  $P'$  vrženého stínu  $l'$ , v němž je tečna svíslá. Je to vržený stín válce, který se dotýká dané kulové plochy podél rovníku  $k$ , proto se jeho vržený stín dotýká vrženého stínu kulové plochy ve vrženém stínu průsečíku  $P$  meze vlastního stínu kulové plochy a válce. Položíme-li  $|N_21| = |1N'|$ , je  $N'$  dalším bodem vrženého stínu  $l'$  s tečnou  $1N'$ , neboť 1 je vrchol dotykového kužele podél vodorovné kružnice, obsahující body  $A, N$ . Při určování nejnižší položeného bodu  $M_2$  meze  $l_2$  si ukážeme konstrukci, kterou lze užít, je-li kulová plocha příliš veliká. Světelný meridián dané kulové plochy otočíme kolem  $o$  do  $\nu$ . Zde nám splyne s obrysem  $m_2$ . Nyní sestrojíme tečný bod  $M_0$  tečny vedené rovnoběžně s paprskem  $s_0$ . Tento bod lze získat tak, že vedeme v koncovém bodě 3 nárysu rovníku tečnu k obrysu  $m_2$  a položíme-li  $|34| = |35| = 2r'$ , pak spojnice  $O_24$  výtíná v obryse otočený nejnižší bod meze vlastního stínu  $l_2$ . Nanesením redukované délky  $|2M_2|$  úsečky  $2M_0$  od bodu 2 na kolmici k  $o_2$  dostaneme nárys hledaného bodu  $M$ . Je-li  $|2M_2| = |M_26|$ , je bod 6 stopníkem tečny meze v bodě  $M$ , proto platí, že  $6M'$  je tečnou  $l'$  v bodě  $M'$ . Naneseme  $|O_2^1F| = |^1FF'| = r$ . Bod  $F'$  je ohniskem elipsy  $l'$ . Excentricita (výstřednost) elipsy  $l'$  je rovna  $e = r\sqrt{2}$ , odtud plyne, že hlavní poloosa je rovna  $r\sqrt{3}$  a trojúhelník  $A_2B_2C'$  je rovnostranný. Bod  $C'$  lze tedy najít též jako průsečík kružnice opsané kolem

bodů  $A_2$  o poloměru  $A_2B_2$  s paprskem  $s_2$  jdoucím  $O_2$ . Křivky  $l_2$  a  $l'$  jsou podobné, jejich poloosy jsou v témže poměru  $\sqrt{3} : 1$ . Poloměr křivosti v hlavních vrcholech těchto elips měří třetinu hlavní poloosy, poloměr křivosti ve vedlejších vrcholech je trojnásobkem vedlejší poloosy příslušné elipsy.

## 4.6 Anuloid (kruhový prstenec)

### 4.6.1 Vnější část anuloidu



Obr. 12

Na obrázku 12 máme sestrojeno osvětlení vnější části anuloidu. Obrazem daného anuloidu v nárysně je *hlavní meridián*  $m_2$ <sup>3</sup>. Opíšeme danému anuloidu tečnou válcovou plochu podél hlavního meridiánu. Pak přímky této plochy jsou kolmé k nárysně  $\nu$ . Přímky meze vlastního stínu užitě válcové plochy se promítají do bodů  $A, B$  na stopách tečných světelných rovin k hlavnímu meridiánu. Body  $A_2, B_2$  jsou body meze vlastního stínu na meridiánu  $m_2$  a stopy tečných světelných rovin jsou současně tečnami meze vlastního stínu v nárysu. Meridián v rovině kolmé k  $\nu$  a hlavní meridián jsou kolmo symetrické podle světelné roviny  $\kappa$ , jdoucí osou. Tedy u jakékoliv rotační plochy z bodů meze vlastního stínu na jednom z obou těchto meridiánů lze kolmou symetrií získat body meze vlastního stínu na druhém meridiánu. Přímky kolmé ke světelné rovině  $\kappa$ , jdoucí osou, se jeví v nárysně jako kolmice k ose  $o_2$ . Tedy bod  $C_2$  na meridiánu kolmém k  $\nu$

<sup>3</sup>Meridián ležící v nárysně  $\nu$  nazýváme **hlavní meridián**. Je zřejmé, že tvoří nárysný obrys zadané rotační plochy.



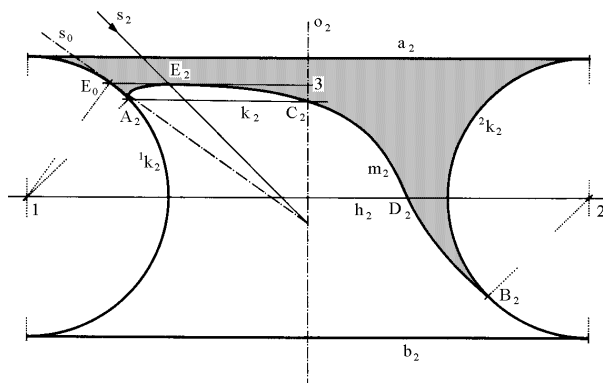
obdržíme, když bodem  $A_2$  vedeme kolmici k ose  $o_2$ . Vržený stín  $C'$  sestrojíme podle obr. 3 a) ( $y_C$  je vzdálenost  $|A_2C_2|$ ). Tečna meze vrženého stínu v bodě  $C'$  je kolmá k ose  $o_2$ .

Abychom určili body meze vlastního stínu na světelném meridiánu (tedy vrcholy meze vlastního stínu), otočíme rovinu tohoto meridiánu i paprskem  $s$  do náryсны. Otočení paprsku  $s$  procházejícího bodem 1 provedeme podle obr. 4 b). Dostaneme otočený paprsek  $s_0$ . Vedeme-li s  $s_0$  rovnoběžnou tečnu k meridiánu  $m_2$ , dotkne se v bodě  $D_0$  a osu rotace protne ve vrženém stínu  $D'$ . Při otáčení zpět zůstane  $D'$  pevný, kdežto  $D_0$  se otočí do polohy  $D_2$  na druhém průmětu světelného paprsku jdoucího bodem  $D'$ . Tečna bodu  $D'$  ( $|D_22| = |2D'| = |3D_2|$ ) jde bodem 3. Při hledání bodu  $D$  lze také postupovat jako při hledání bodu  $M$  na kulové ploše  $\Phi$  (viz. obr. 11). Nárys viditelného bodu  $E$  na *rovníku*  $r$ <sup>4</sup> leží ve vzdálenosti, rovné redukovanému poloměru rovníku  $r$  o středu  $O$ . Pro bod  $E'$  platí:  $|O_2E_2| = |E_2^1E| = |^1EF^1| = r'$  a tečna v tomto bodě je rovnoběžná s osou  $o_2$ . Ke konstrukci obecného bodu  $F$  použijeme pomocné kulové plochy dotýkající se anuloidu podél  $f$  (viz. 4.4, obr. 9). Tečna k mezi vrženého stínu  $F'$  je nárysná stopa tečné roviny rotační plochy v bodě  $F$ . Tečná rovina se ztotožňuje s tečnou rovinou použité pomocné kulové plochy, a proto je kolmá k  $SF$ . Jelikož nárys kolmice k rovině je kolmý k nárysné stopě tečné roviny, bude naopak nárysná stopa tečné roviny kolmá k poloměru  $|F_2S_2|$ . Stejným způsobem postupujeme u dalšího bodu  $G$ .

Takto lze sestrojít dostatečný počet bodů meze vlastního stínu anuloidu a bodů s tečnou meze vrženého stínu.

#### 4.6.2 Vnitřní část anuloidu

Pro osvětlení vnitřní části anuloidu (*trochilu* s hyperbolickými body) (obr. 13) vyhledáme nejprve body  $A, B$  meze vlastního stínu  $m$  na obryse. Platí:  $A_21 \parallel B_22 \perp S_2$ . Z bodu  $A_2$  spustíme kolmici  $k_2$  na osu  $o_2$ . V průsečíku dostaneme nárys  $C_2$  bodu  $C$  meze stínu na meridiánu v rovině kolmé k nárysně  $\nu$ . Bod  $D$  na *hrdle*  $h$ <sup>5</sup> má nárys  $D_2 \in h_2$  od  $o_2$  vpravo ve vzdálenosti redukovaného poloměru hrdla. Nejvýše



Obr. 13

<sup>4</sup>**Rovník:** Je-li v jistém okolí bodu  $A$  na řídicí křivce  $k$  rotační plochy vzdálenost bodu  $A$  od osy  $o$  největší, pak se rovnoběžka bodu  $A$  nazývá **rovník**.

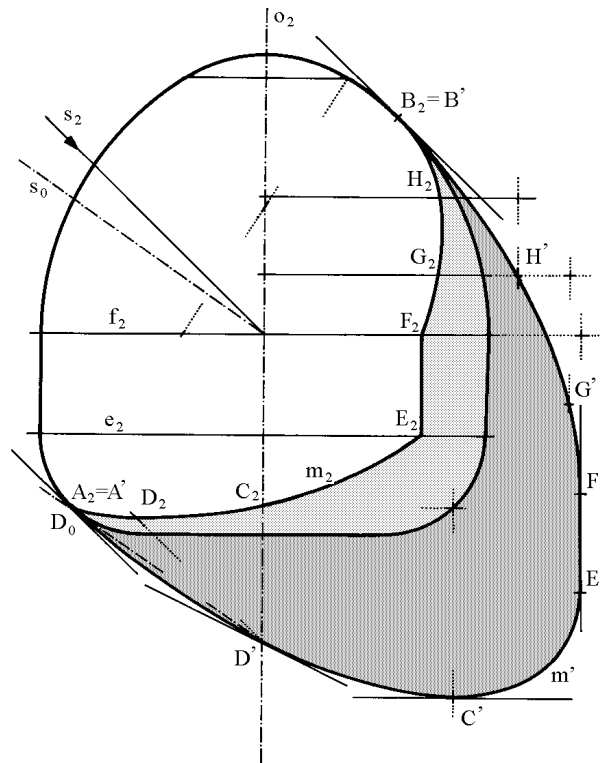
<sup>5</sup>**Hrdlo:** Je-li v jistém okolí bodu  $A$  na řídicí křivce  $k$  rotační plochy vzdálenost bodu  $A$  od osy rotace  $o$  nejmenší, pak se rovnoběžka bodu  $A$  nazývá **hrdlo**.

položený bod  $E$ , ležící ve světelném meridiánu, získáme např. stejným způsobem jako v předešlé úloze bod  $D_2$  (viz. 4.6.1., obr. 12). Platí  $E_03 \perp o_2$ , přičemž  $E_23$  je rovno redukci úsečky  $E_03$ . Vržený stín daného tělesa na sebe a na druhou průmětnu zatím provádět nebudeme, konstrukci těchto stínů si ukážeme až později.

## 4.7 Obecná rotační plocha

Osvětlení obecné rotační plochy (obr. 14) provádíme obdobně jako v předcházejících příkladech.

Vyšetříme body meze vlastního stínu na rovnících a hrdlech (v obrázku leží body  $E$  a  $F$  na rovnících  $e$  a  $f$ ). Pomocí tečen k hlavnímu meridiánu rovnoběžných se směrem  $s_2$  dostaneme body  $A, B$ . Jejich otočením o  $90^\circ$  kolem  $o$  do meridiánu kolmého k  $\nu$  dostaneme další body meze vlastního stínu (na obrázku bod  $C$  vznikl otočením bodu  $A$ ). Sestrojením tečny rovnoběžné se směrem  $s_0$  otočeného paprsku k hlavnímu meridiánu vyšetříme otočený nejvyšší, resp. nejnižší bod meze vlastního stínu (v našem případě sestrojíme nejnižší bod  $D_0$  a z něho odvodíme  $D_2$ ). Nestačí-li stanovené body k narysování křivky, určíme další body na jednotlivých rovnoběžkách. (např. body  $G, H$ ). Z určených bodů meze vlastního stínu  $m$  určíme mez vrženého stínu  $m'$  na nárysnu i s tečnami v jednotlivých bodech.



Obr. 14

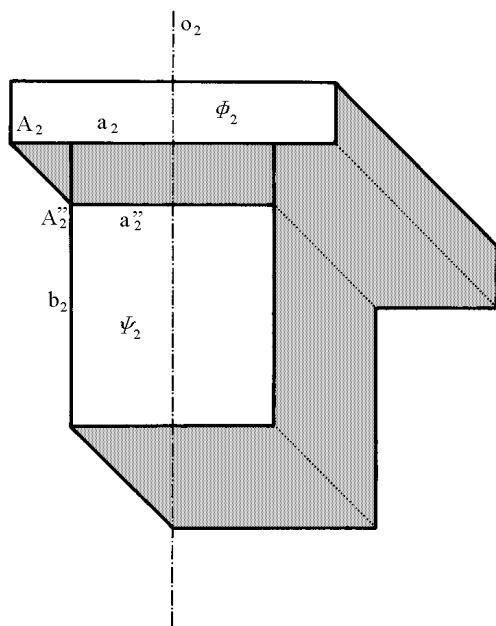
## 5 Vržené stíny hranolu na tělesa

V další části si ukážeme příklady, kdy je dán svislý hranol a rotační či nerotační těleso o společné ose, a budeme vyšetřovat jejich meze vlastního a vrženého stínu. Při popisu konstrukcí stínů se zameříme více na nové, ještě nepopsané konstrukce či na některé jejich důležité vlastnosti. Zbylé konstrukce již většinou lehce doplníme podle výše probraných konstrukcí.

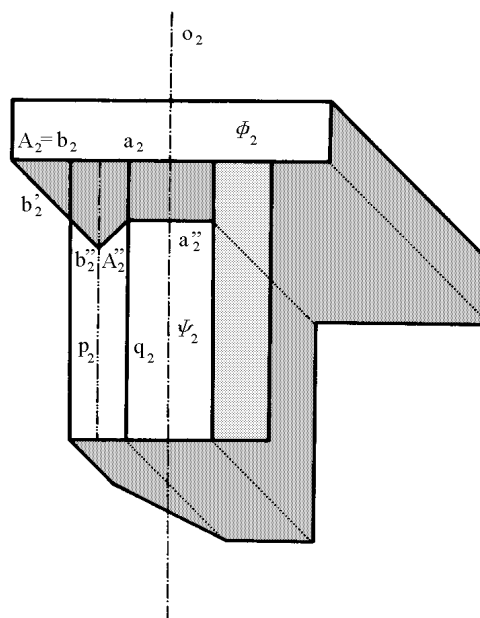
### 5.1 Dva sousedé hranoly

Vezměme si dva sousedé hranoly o čtvercové podstavě (obr. 15). Bod  $A$  tělesa  $\Phi$ , který leží ve světelné rovině jdoucí osou  $o$ , vrhá stín  $A_2''$  na hranu  $b_2$  tělesa  $\Psi$ . Vržený stín  $a_2''$  hrany  $a$  je rovnoběžný s  $a_2$  a prochází bodem  $A_2''$ .

Na obrázku 16 je těleso  $\Psi$  pravidelný osmiboký hranol. Vržený stín hrany  $b \perp \nu$  vede rovnoběžně s  $s_2$  až k vrženému stínu  $A''$  na  $\Psi$ , který leží na střední příčce  $p$  příslušné stěny  $\Psi$ . Od bodu  $A_2''$  jde nárys vrženého stínu kolmo k  $s_2$  a od hrany  $q_2$  postupuje v  $a_2''$  vodorovně.



Obr. 15



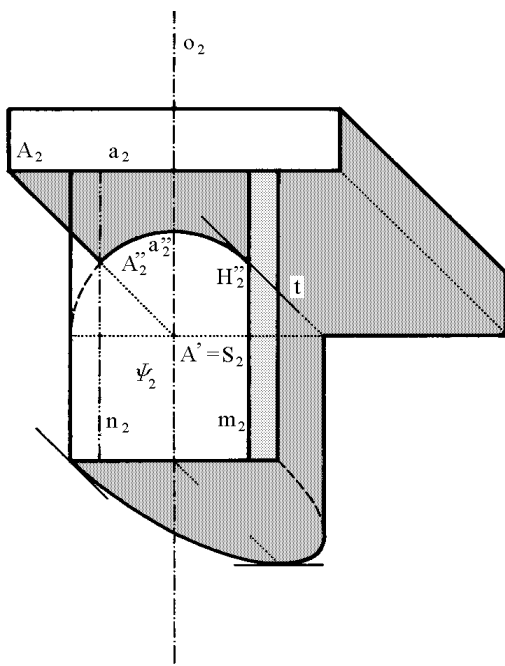
Obr. 16

### 5.2 Hranol a rotační válcová plocha

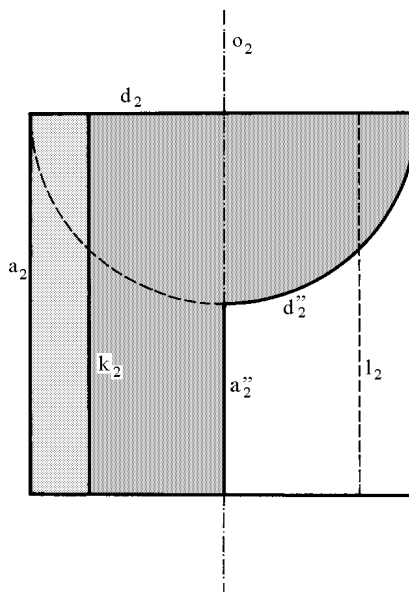
Sestrojíme nyní technické osvětlení válce  $\Psi$  krytého sousou čtvercovou deskou. (obr. 17). Válec osvětlíme podle 4.3, obr. 8. Dolní průčelnou hranu desky označme  $a$ . Její vržený stín  $a'$  na  $\nu$  sestrojíme např. pomocí bodu  $A \in a$ , ležícího ve světelném meridiánu. Vržený stín  $A''$  bodu  $A$  na  $\Psi$  leží na přímce  $n$  ( $n = \Psi \cap \kappa$ ;

$\kappa$  ... světelná rovina obsahující  $A$  a  $o$ ). Vržený stín celé desky snadno doplníme. Hrana  $a$  vrhá stín  $a''$  na válec, který je částí řezu světelné roviny  $\eta$  proložené přímkou  $a$  s příslušnou válcovou plochou. Křivka  $a''$  je tedy částí elipsy. Rovina  $\eta$  má od průmětny  $\nu$  odchylku  $45^\circ$ , její spád je tedy jednotkový. Platí proto, že pravouhlé průměty křivky  $a''$  do promítací roviny přímky i do náryсны jsou shodné křivky. Z toho plyne, že  $a''$  je částí kružnice. Její poloměr je rovný poloměru válcové plochy  $\Psi$  a střed  $S_2$  leží na  $o_2$  pod nárysem  $a_2$  v téže vzdálenosti, v které je v prostoru přímka  $a$  vzdálená od osy  $o$ . Počáteční bod křivky  $a''$  je vržený stín  $A''$  bodu  $A$  na válec a koncový bod je bod  $H''$  vlastního stínu. Průsečnice  $t$  tečné roviny  $\tau$  v bodě  $H''$  k válci s rovinou  $\eta$  je tečna ke křivce  $a''$ . Protože obě roviny jsou světelné, platí  $t \parallel s$  a proto  $t_2 \parallel s_2$ . Přímka  $b$  procházející bodem  $A$  a kolmá k  $\nu$  vrhá na válec stín  $b''$ , který je opět částí elipsy (řez světelné roviny proložené přímkou  $b$  s válcovou plochou). Nárys  $b''_2$  je úsečka.

Na obrázku 18 je vyřešen nárys vrženého stínu průměru  $d$  základny dutého poloválce o poloměru  $r$  na vnitřní oblínu. Je to kružnice  $d''_2$  o středu  $S_2$  a poloměru  $r$ . Dále sestrojme mez vlastního stínu  $k$  a přímku  $l$  nejvíce osvětlenou ( $d(k_2, o_2) = d(o_2 l_2) = r'$ ). Mez vrženého stínu hrany  $a$  nám splývá s nárysem osy  $o$  rotačního válce ( $a''_2 = o_2$ ).



Obr. 17

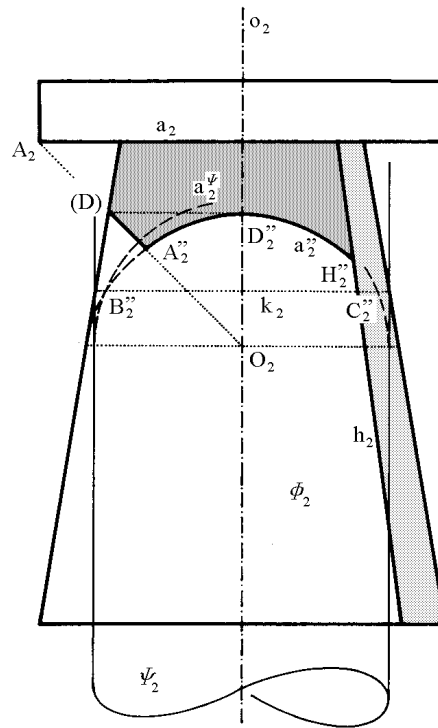


Obr. 18

### 5.3 Hranol a rotační kužel

Předešlé konstrukce zčásti využijeme při konstrukci vrženého stínu hranolu na rotační kužel (obr. 19). Hledejme body  $B''$ ,  $C''$ , do nichž vrhá hrana  $a$  stín na kružnici  $k$  ( $k$  je vodorovná kružnice ležící na rotačním kuželi). Kružnicí  $k$

proložíme svislou válcovou plochu  $\Psi$ . Na nárys  $o_2$  její osy nanese od  $a_2$  do  $O_2$  vzdálenost  $a$  od osy  $o$  v prostoru. Jak jsme si ukázali v 5.2, je kružnice  $a_2^\Psi$ , opsaná kolem  $O_2$  o poloměru kružnice  $k$ , nárysem vrženého stínu přímky jdoucí hranou  $a$  na rotační plochu  $\Psi$ . Její průsečíky  $B_2'', C_2''$  s  $k_2$  jsou hledané body, do nichž  $a$  vrhá stín na kružnici  $k$ . Opakováním této konstrukce získáme další body vrženého stínu. Nejvyšší bod  $D''$  leží na kružnici procházející bodem  $(D)$ , v němž protíná nárys světelného paprsku  $s_2$ , jdoucí bodem  $O_2$ , obrys kuželové plochy  $\Phi$ . Vodorovná kružnice, jejíž rovina prochází bodem  $O$ , obsahuje body křivky  $a''$ , které náleží obrysu plochy  $\Phi$ .

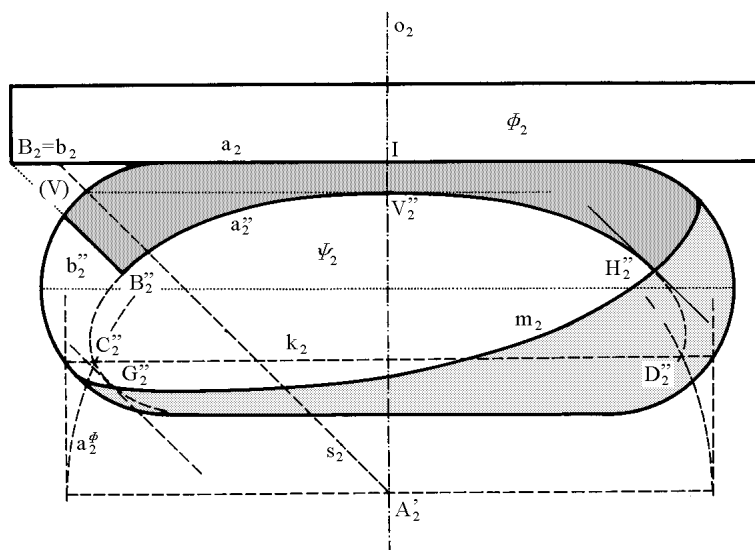


Obr. 19

#### 5.4 Hranol a anuloid

Sestrojíme vržený stín obdelníkové desky  $\Phi$  na rotační anuloid  $\Psi$  (obr. 20). Průčelná hrana  $a$  je vzdálena od druhé průmětny  $\nu$  o délku  $|A'I|$ . Mez  $m$  vlastního stínu rotační plochy je určena podle úlohy 4.6.1., obr. 12. Jednotlivé body meze vrženého stínu na rotační plochu sestrojíme pomocí úlohy 5.3., obr. 19: Rovnoběžkou  $k$  plochy proložíme pomocnou válcovou plochu s osou  $o$  a sestrojíme vržený stín  $a^\Phi$  přímky  $a$  obsahující dolní hranu desky na tuto válcovou plochu. Podle 5.2. je  $a^\Phi$  kružnice o středu  $A'$  stejného poloměru jako  $k$ . Průsečíky  $C_2'', D_2''$  kružnice  $a_2^\Phi$  s  $k_2$  jsou nárysy bodů vrženého stínu přímky  $a$  na kružnici  $k$ . Křivka  $a_2^\Phi$  je souměrná podle osy  $o_2$ , na níž leží její vrchol  $V_2''$ . Vedeme-li bodem  $A'$  paprsek  $s_2$ , protne hlavní meridián v bodě  $(V)$ , z něhož spuštěná kolmice na osu  $o_2$

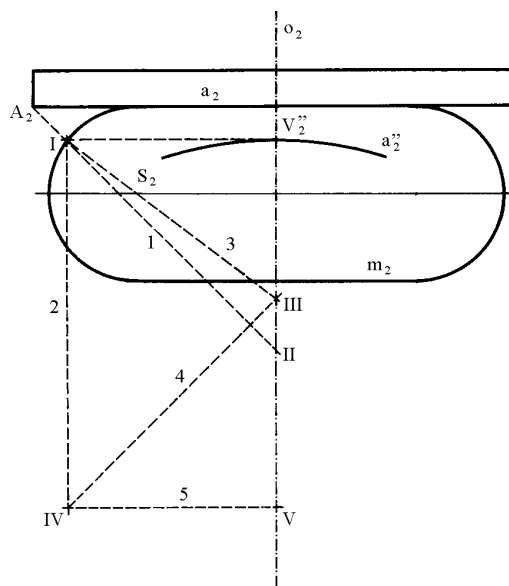
má patu v hledaném vrcholu  $V_2''$ . V obou bodech  $G''$ ,  $H''$ , kde přechází vržený stín do vlastního stínu, je tečna k vrženému stínu rovnoběžná se světelným paprskem  $s_2$ . Vržený stín přímky  $b$  kolmé k nárysně a procházející bodem  $B$  leží v promítací rovině, a proto se nám její nárys jeví jako přímka  $b_2''$ . Křivky  $a''$  a  $b''$  jsou v prostoru kolmo souměrné podle roviny světelného meridiánu procházejícího společným bodem  $B''$  obou křivek.



Obr. 20

Ve vrcholu  $V_2''$  nárysu křivky  $a''$  můžeme sestavit oskulační kružnici (obr. 21).

Vedme bodem  $A_2$  rovnoběžku 1 s nárysem světelného paprsku  $s_2$ . Dostaneme tak body  $I$ ,  $II$  v průsečících s obrysem  $m_2$  a osou  $o_2$ . Bodem  $I$  proložíme přímku 2  $\parallel o_2$ . Spojnice 3 bodu  $I$  a středu  $S_2$  poledníku protíná osu  $o_2$  v bodě  $III$ . Tímto bodem vedená kolmice 4 na 1 protne přímku 2 v bodě  $IV$ . Spustíme-li z tohoto bodu kolmici 5 na osu  $o_2$ , dostaneme hledaný střed křivosti  $V$ . Zdůvodnění této konstrukce lze nalézt např. v [7], str. 613-614.



Obr. 21

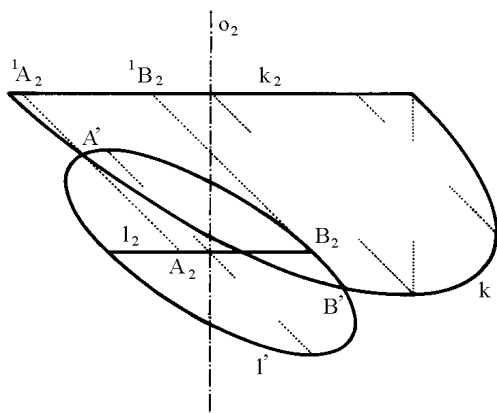
## 6 Vržené stíny vodorovné kružnice na tělesa

### 6.1 Vržený stín vodorovné kružnice na vodorovnou kružnici

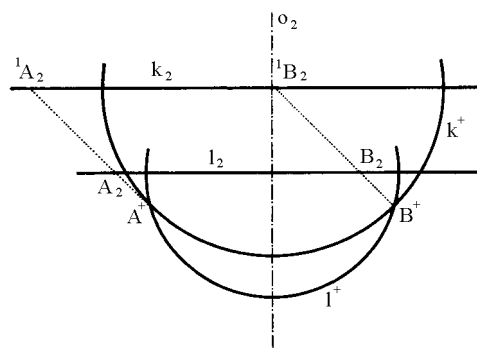
Dříve než si naznačíme sestrojování vržených stínů na různé plochy, ukažme si dvě konstrukce, které budeme v pozdějších úvahách často využívat.

Mějme dvě vodorovné kružnice a hledejme body, v nichž se vržené stíny obou kružnic protínají. Úlohu lze vyřešit dvěma způsoby.

V prvním způsobu, viz. obr. 22, postupujeme podle úlohy z odstavce 4.1., obr. 6. Sestrojíme vržené stíny daných kružnic  $k, l$  do nárýsny  $\nu$ . Vržené stíny  $k', l'$  daných kružnic se protínají v bodech  $A', B'$ . Zpětné paprsky proložené těmito body nám určí na  $k$  body  ${}^1A, {}^1B$  a na  $l$  body  $A, B$ , které jsou vrženými stíny bodů  ${}^1A, {}^1B$  na rovinu kružnice  $l$ . Jak je vidět, tak k vyhledání dvou, respektive jediného viditelného bodu v náryse, rýsujeme dvě elipsy, což je úloha složitější, požadujeme-li přesné sestrojování hledaných průsečíků. Proto si ukážeme ještě jeden způsob (obr. 23) užívající Piletovy roviny  $\mu$  (viz. 4.2, obr. 7). Vrženým stínem kružnic  $k, l$  do Piletovy roviny jsou elipsy  $k^+, l^+$ , jejichž nárysy jsou kružnice o redukovaném poloměru křivek  $k, l$ . Zpětné paprsky vedené průsečíky  $A^+, B^+$  těchto kružnic nám na  $l_2$  určí nárysy hledaných bodů  $A_2, B_2$ , jež jsou nárysy vržených stínů bodů  ${}^1A, {}^1B$  kružnice  $k$  na  $l$ .



Obr. 22



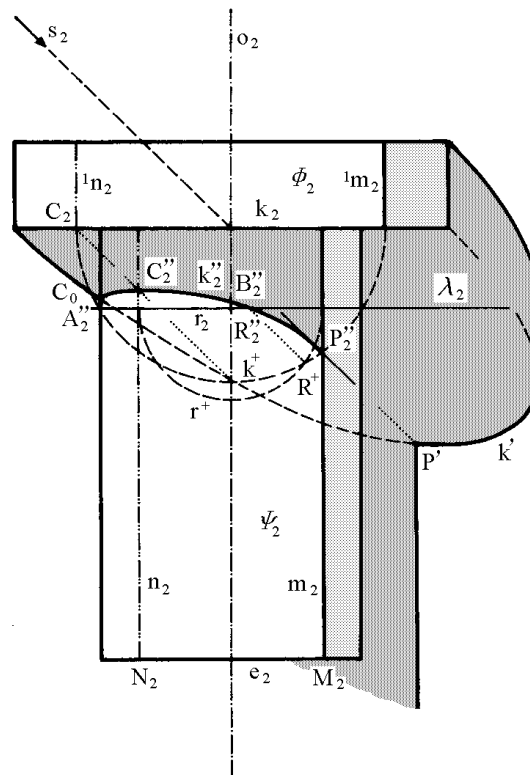
Obr. 23



## 6.2 Dva sousé rotační válce

Mějme dány dva sousé rotační válce (obr. 24). Meze vlastního stínu  $m, n, {}^1m, {}^1n$  ploch  $\Phi, \Psi$  leží v Piletově rovině, a tedy jejich vzdálenost od osy  $o$  je rovna redukovanému poloměru podstav  $k, l$ .

Nyní určíme vržené stíny kružnice  $k$  na plochu  $\Psi$ . Nárys vrženého stínu kružnice  $k$  na Piletovu rovinu je kružnice  $k^+$ . Zvolme si libovolnou vodorovnou kružnici  $r$  na válci  $\Psi$ . Tato kružnice vrhá na Piletovu rovinu stín  $r^+$ , dotýkající se přímkou  $m_2, n_2$ . Průsečíky kružnic  $k^+$  a  $r^+$  jsou nárysy vržených stínů na Piletovu rovinu dvou bodů na válci, ve kterých vržený stín kružnice  $k$  na válec protíná jeho povrchovou kružnici  $r$ . Nárysy těchto bodů na povrchu válce leží v průsečíku nárysu zpětných paprsků  $s_2$  (v obrázku je zobrazen pouze viditelný bod  $R$ ). V průsečíku přímky  $m_2$  s  $k^+$  obdržíme bod  $P_2''$ . Je to bod, ve kterém končí oblouk  $k_2''$  vrženého stínu kružnice  $k$  na válec  $\Psi$ . Tečnou ke  $k_2''$  v  $P_2''$  je obraz světelného paprsku procházejícího  $P_2''$ . Nejvyšší bod  $C''$  vrženého stínu  $k''$  leží v rovině  $\kappa$  světelného meridiánu a určíme ho pomocí otočení tohoto meridiánu do nárysu. Volíme-li různé polohy vodorovné kružnice  $r$  daného válce, obdržíme opakovaním výše popsaného postupu různé body nárysu vrženého stínu  $k''$  na válec, který tak lze určit s dostatečnou přesností. Průsečíkem  $B_2''$  vrženého stínu  $k_2''$  s  $o_2$  vedená kolmice na  $o_2$  protíná hlavní meridián v bodě  $A_2''$ , ve kterém se oblouk  $k_2''$  dotýká hlavního meridiánu a kde končí jeho viditelnost. Vržený stín do nárysu již lehce doplníme podle dříve popsaných konstrukcí.

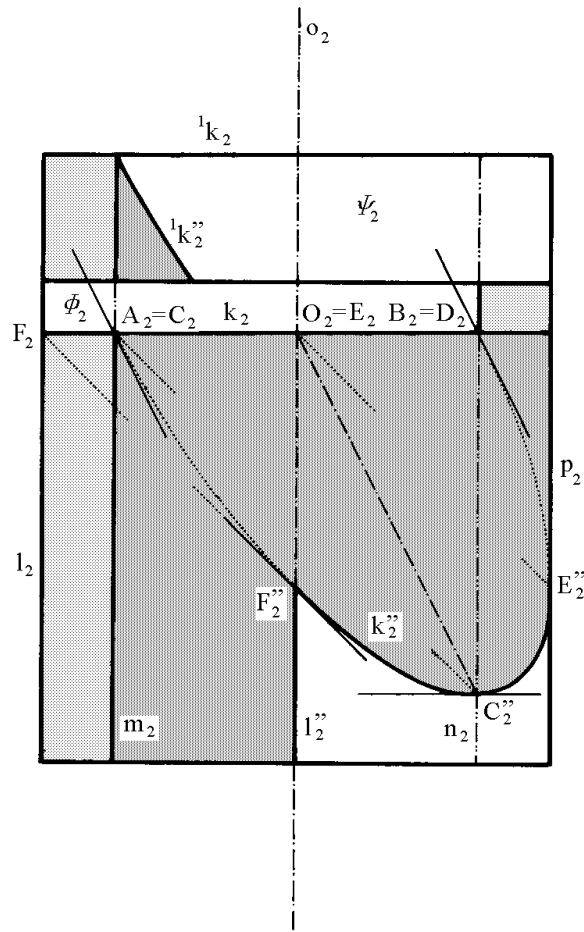


Obr. 24



## 6.3 Vržený stín vodorovné kružnice na vnitřní dutinu válce

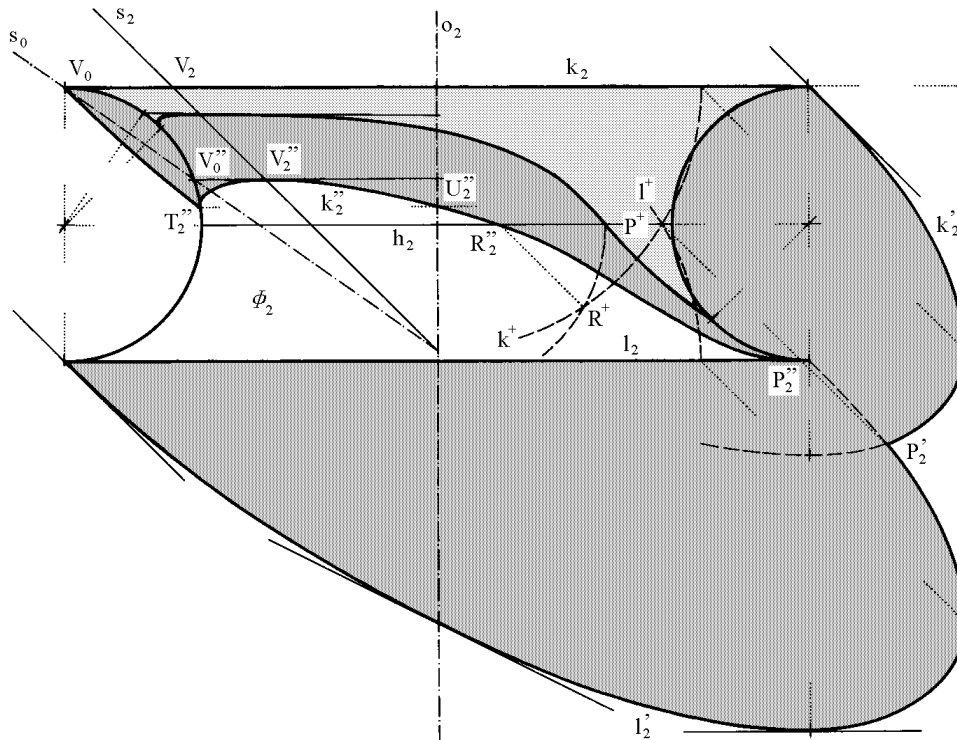
Mějme danu polovinu rotační válcové plochy  $\Psi$  ležící za průmětnou  $\nu$  (obr. 25). Zvolme si na ploše  $\Psi$  kružnici  $k$ , která nám omezuje kruh, a hledíme jeho stín na dutinu  $\Psi$ . Vrženým stínem kružnice  $k$  na  $\Psi$  je elipsa  $k''$ . Nejdříve sestrojíme mez vlastního stínu  $m$  a nejosvětlenější přímku  $n$ . Na kružnici  $k$  si vyznačíme body  $A, B$  ležící v Piletově rovině  $\mu$  a body  $C, D$  ležící ve světelném meridiánu  $\kappa$ . Body  $A, B$  splývají se svými stíny na vnitřní oblíně válce, bod  $C$  se nám zobrazí do bodu  $C''$ . Platí pro něj:  $|C_2D_2| = |D_2C_2''|$ . Tímto jsme získali pro křivku  $k_2''$  průměr  $A_2B_2$  a k němu sdružený poloměr  $O_2C_2''$ . Tečny v bodech  $A_2, B_2$  jsou tedy rovnoběžné s poloměrem  $O_2C_2''$ . Bod  $C_2''$  je nejnížší bod a tečna v něm je rovnoběžná s průměrem  $A_2B_2$ . Nyní sestrojíme vržený stín bodu  $E$ , který je nejvzdálenějším bodem kružnice  $k$  od náryсны  $\nu$  ( $E_2 \in o_2$ ). Bod  $E$  vrhá svůj stín na pravou obrysovou přímku  $p$  do bodu  $E''$ . Bod  $F$  kružnice  $k$  ležící na levém obrysu  $l$  vrhá svůj stín do bodu  $F''$ , pro nějž platí:  $|F_2O_2| = |O_2F_2''|$ . Tečna v tomto bodě je rovnoběžná se směrem  $s_2$ . Na obrázku je ještě sestrojen vržený stín  ${}^1k''$  vrchní kružnice  ${}^1k$  na plochu  $\Psi$ .



Obr. 25

## 6.4 Vržený stín na anuloid

## 6.4.1 Vržený stín kružnice na vnitřní část anuloidu



Obr. 26

Obrázek 26 nám zobrazuje vnitřní část anuloidu  $\Phi$ , obsahující hrdlo  $h$ , horní kružnici  $k$  a dolní  $l$ , jež jsou obě *kráterové*<sup>6</sup>. Mez vlastního stínu  $m$  sestrojíme podle 4.6.2., obr. 13. Dále hledáme mez vrženého stínu kružnice  $k$  na  $\Phi$ . Nejvyšší bod křivky  $k''$  leží v rovině světelného meridiánu  $\kappa$ . Otočením  $V_2$  do roviny hlavního meridiánu dostaneme bod  $V_0$ . Bodem  $V_0$  vedme otočený světelný paprsek  $s_0$ . Jeho průsečík s poledníkem je bod  $V_0''$ , který je otočený nejvyšší bod vrženého stínu  $k''$ . Jeho otočením zpět do roviny světelného meridiánu dostaneme hledaný bod  $V_2''$ . Lze dokázat, že bod  $V''$  leží na rovnoběžkové kružnici plochy  $\Phi$ , která je ve vzdálenosti  $\frac{1}{3}r$  od hrdla (viz. [1], str. 28-29). K vyhledání dalších důležitých bodů využijeme s výhodou Piletovu rovinu  $\mu$ . Nárýsy vržených stínů kružnic  $k, l$  na rovinu  $\mu$  jsou kružnice  $k^+, l^+$ , jejichž poloměry jsou rovny redukovaným délkám poloměrů kružnic  $k, l$ . Vedeme-li bodem  $P^+$  ( $P \in k^+ \cap l^+$ ) světelný paprsek, dostaneme na  $l_2$  bod  $P_2''$ , do něhož vede hledaný vržený stín. Pomocí vrženého stínu  $h^+$  hrdla získáme další bod  $R$  stínu na hrdle. Tuto konstrukci můžeme opa-

<sup>6</sup>**Kráterová kružnice:** Rovnoběžka, podél níž tečny meridiánů vytvoří rovinu, se nazývá *kráterová kružnice*.

kovat pro další rovnoběžky. K průsečíku  $U''$  křivky  $k''$  s poledníkem kolným k  $\nu$  sestrojíme souměrně sdružený bod  $T''$  na obryse.

Tento příklad lze vyřešit též za pomoci vržených stínů do náryсны  $\nu$ , které jsou pro kružnice  $k, l$  elipsami. Průsečíkem  $P'$  křivek  $k', l'$  vedme zpětný paprsek, který na  $l$  určí krajní bod  $P''$  stínu  $k''$ . Bod  $T''$ , v němž  $k''$  protíná hlavní meridián, je druhým krajním bodem vrženého stínu. Jeho otočením kolem osy  $o$  do bodu  $U''$  dostaneme další bod. Tyto body spolu s nejvyšším bodem  $V''$  dostatečně určují křivku  $k''$ .

Směr pravé větve vrženého stínu je závislý na poměru výšky k šířce tělesa. V praxi mohou nastat tyto tři případy:

a) Vržený stín horní základny dopadne na dolní základnu a odtud přechází do druhé průmětny;

b) Vržený stín protíná obrys tělesa a nedotýká se přitom ani dolní základny, ani vlastního stínu tělesa;

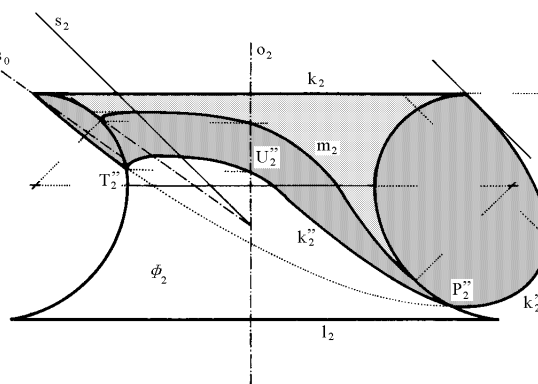
c) Vržený stín horní základny se protíná s vlastním stínem tělesa dříve, než se dotkne jeho obrysu.

Vržený stín v levé polovině tělesa sestrojíme podle předešlého postupu. Pravou větev vrženého stínu lze sestavit takto:

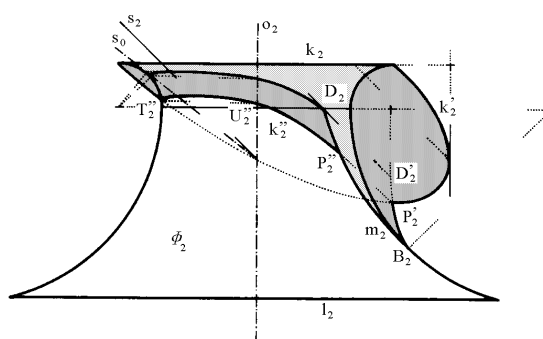
ad a) Postupujeme stejně jako v předešlém případě (obr. 26). Vyšetříme vržený stín horní i dolní základny do náryсны  $\nu$  (viz. 4.1., obr. 6). Obě elipsy vrženého stínu se protínají v bodě  $P'_2$ . Vedeme-li jím zpětný paprsek, vytne nám na  $l_2$  bod  $P''_2$ , jímž prochází křivka vrženého stínu.

ad b) Bod přechodu vrženého stínu z tělesa na průmětnu je již určen průsečíkem vrženého stínu  $k'_2$  s obrysem tělesa (obr. 27).

ad c) Vržené stíny obou základen se neprotínají (obr. 28). Zde i část tělesa, která je ve vlastním stínu, vrhá stín na průmětnu. Vržený stín tělesa na druhou průmětnu prochází bodem B, kde se mez vlastního stínu dotýká obrysu tělesa.



Obr. 27



Obr. 28

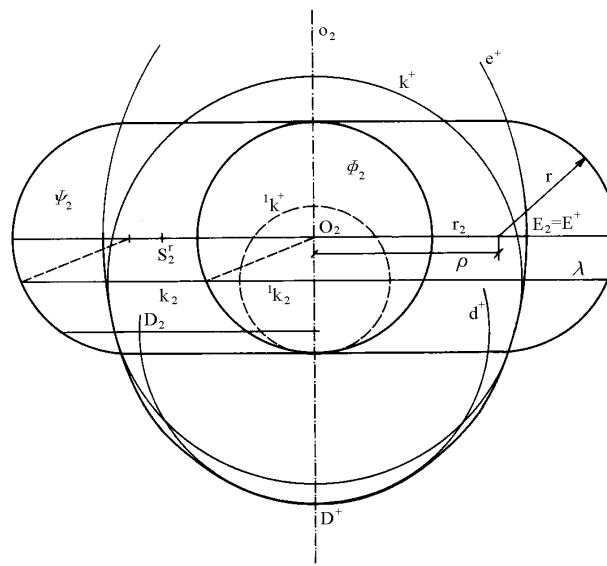
Další bod vrženého stínu sestrojíme, vyšetříme-li např. vržený stín bodu  $D$  na hrdle. Vržený stín  $m'$  meze vlastního stínu  $m$  nám protíná vržený stín  $K'$  horní základny v bodě  $P'$ . Jím vedeme zpětný paprsek, který nám na mezi vlastního stínu určí hledaný bod přechodu  $P''$ . Více informací o vlastnostech vrženého stínu lze nalést v [1], str. 29-31.

Stejným způsobem řešíme vržené stíny různých rotačních těles na jiná rotační tělesa.

### 6.4.2 Vržený stín anuloidu na Piletovu rovinu

Než vyřešíme konstrukci vrženého stínu kružnice na anuloid, ukažme si konstrukci vrženého stínu anuloidu na Piletovu rovinu, kterou lze později s výhodou využít v dalších úlohách.

Nechť je dán anuloid  $\Psi$  o ose  $o$  (obr. 29). Abychom mohli snadno vyřešit vržený stín anuloidu  $\Psi$  na Piletovu rovinu  $\mu$ , opíšeme kolem středu  $O$  kulovou plochu  $\Phi$  o poloměru  $r$ , rovném poloměru meridiánních kružnic. Vzdálenost středů meridiánů od osy  $o$  označme  $\varrho$ . Libovolná vodorovná rovina  $\lambda \perp o$  protíná anuloid  $\Psi$  v kružnici  $k$  a kulovou plochu  $\Phi$  k ní soustředné kružnici  ${}^1k$ . Rozdíl jejich poloměrů, jak je vidět z obrázku, je rovný délce  $\varrho$ . Vržené stíny obou kružnic na Piletovu rovinu  $\mu$  se v náryse jeví jako



Obr. 29

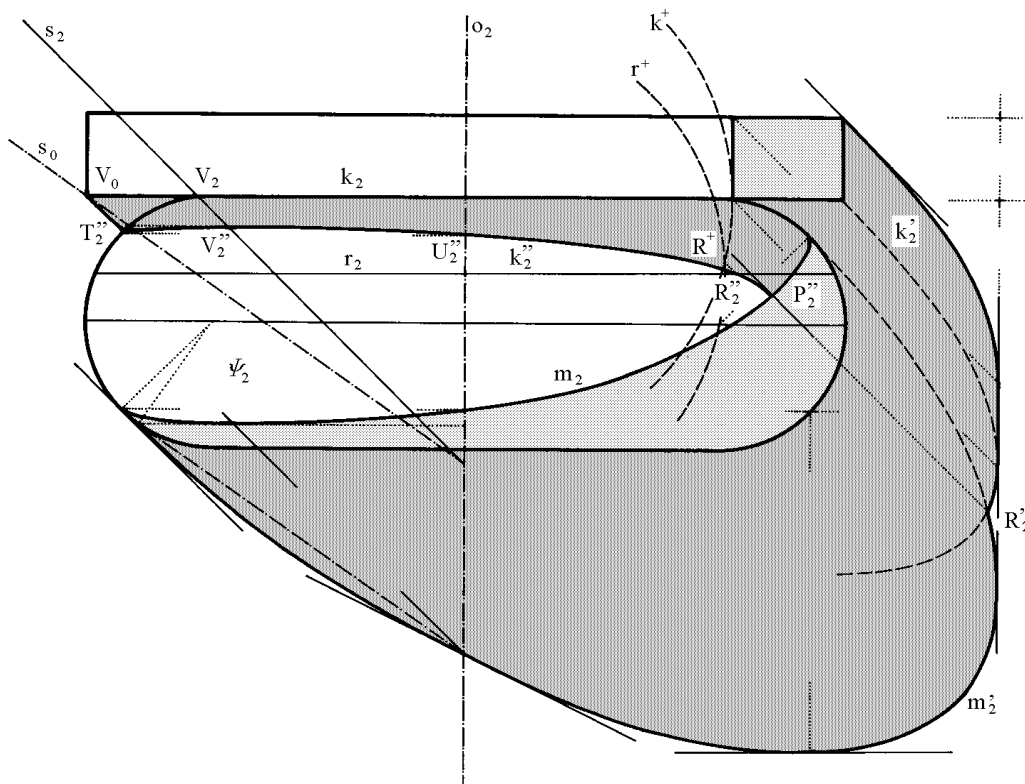
dvě soustředné kružnice, jejichž poloměry jsou redukce poloměrů kružnic  $k$  a  ${}^1k$ , a proto jejich vzdálenost je rovna redukci úsečky  $\varrho$  a je pro všechny roviny  $\lambda$  stejná. Kružnice  ${}^1k^+$  obaluje eliptický nárys vrženého stínu kulové plochy  $\Phi$ , druhá kružnice  $k^+$  proto obaluje ekvidistantu  $e^{+7}$  této elipsy, vzdálenou od ní o redukci úsečky  $\varrho$ . Nárys  $d^+$  vrženého stínu kružnice, nesoucí vrchol meze vlastního stínu, je oskulační kružnicí křivky  $e^+$  ve vrcholu  $D^+$ . Druhý vrchol  $E^+ = E_2$  leží na nárysu rovníku  $r_2$ , jeho střed křivosti leží v  $S_2^r$  na  $r_2$ , při čemž  $|S_2^r O_2| = 2\varrho'$  ( $\varrho'$  je redukovaná délka poloměru  $\varrho$ ).

<sup>7</sup>Ekvidistanta křivky: Ekvidistantou křivky rozumíme ekvidistantní (rovnoběžnou) křivku mající od dané křivky na společných normálách stejnou vzdálenost.

## 6.4.3 Vržený stín kružnice na vnější část anuloidu

Na obrázku 30 je vyřešen vržený stín  $k''$  kružnice  $k$  na vnější část anuloidu  $\Psi$ . Nejdříve sestrojíme vržený stín bodu  $V \in k$  ležícího ve světelném meridiánu, pomocí otočení do roviny hlavního meridiánu. Postupujeme stejně jako v předěšlé kapitole (viz. obr. 26). Opět užijeme Piletovy roviny k určení dalších bodů vrženého stínu. Sestrojíme vržené stíny kružnic  $k$  a  $r$  do Piletovy roviny. Průsečíkem  $R^+$  ( $R^+ \in k^+ \cap r^+$ ) vedený zpětný paprsek protíná  $r$  v dalším bodě  $R''$ . Průsečíkem  $U_2''$  nárysu křivky  $k_2''$  s  $o_2$  vedeme kolmici k  $o_2$ , která nám na obryse určí bod  $T_2''$  v němž se křivka  $K_2''$  dotýká obrysu anuloidu  $\Psi$ .

Další možností je postupovat tak, že sestrojíme vržené stíny  $k'$  a  $m'$  kružnice  $k$  a meze vlastního stínu anuloidu  $\Psi$  na nárysnu  $\nu$  jdoucí osou  $o$ . Nárys  $k_2''$  křivky  $k''$  vychází z průsečíku  $T_2''$  křivky  $k'$  s obrysem anuloidu. K bodu  $T''$  určíme opět souměrně sdružený bod  $U''$  na meridiánu kolmém k  $\nu$ . Nárys  $P_2''$  přechodového bodu odvodíme pomocí světelného paprsku vedeného průsečíkem  $P'$  křivek  $k'$  a  $m'$ .



Obr. 30

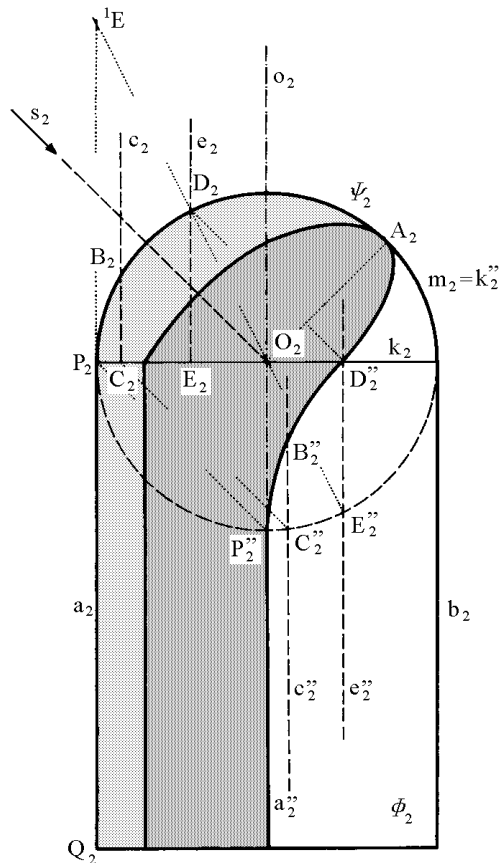
Bod přechodu  $P''$  lze nalézt též tak, že sestrojíme vržené stíny kružnice  $k$  a anuloidu  $\Psi$  do Piletovy roviny. K sestrojení vrženého stínu anuloidu na Piletovu rovinu použijeme 6.4.2., obr. 29. Touto konstrukcí se však zde nebudeme zabývat. Lze ji nalézt v [1], str. 16, 31 nebo v [7], str. 616-617.



### 6.5 Osvětlení výklenku (niky)

Nikou rozumíme polovinu dutého svislého rotačního válce ukončeného čtvrtinou duté kulové plochy. Na obrázku 31 je zobrazena nika o ose  $o_2$  ležící v nárysně  $\nu$ , která obsahuje hrany  $a, b$  válce  $\Phi$  a kruhovou hranu  $m$  kulové plochy  $\Psi$ . Nejdříve sestrojíme mez vlastního stínu. K jejímu určení použijeme konstrukci z kapitol 4.3., obr. 8 a 4.5., obr. 11. Čára  $APQ$  bude vrhat stín do osvětlené části výklenku. Ke konstrukci jejího vrženého stínu užijeme s výhodou vrženého stínu  $k''$  pomocné přímky  $k = PO$ , jehož průmětem je kružnice  $k_2'' = m_2$  (viz. 5.2., obr. 18). Nárys vrženého stínu hrany  $PQ = a$  splývá s nárysem osy válcové plochy ( $a_2'' \equiv o_2$ ), bod  $P_2$  přejde do bodu  $P_2''$ . Nyní užijeme větu o incidenci útvarů a jejich průmětů a sestrojíme vržený stín kružnice  $m$ . Zvolíme-li svislou přímku  $c$ , která protíná kružnici  $m$  v bodě  $B$  a přímku  $k$  v bodě  $C$ , platí  $c_2'' \parallel c_2$ ,  $C_2'' \in c_2'' \cap k_2''$ . Bod  $B_2''$  vrženého stínu kružnice  $m$  leží na  $c_2''$  ve vzdálenosti  $|B_2C_2|$  od bodu  $C_2''$ . Zvláštní důležitost má bod  $D'' \in k_2$ . Je to bod, v němž vržený stín kružnice  $m$  přechází z válcové plochy na plochu kulovou. Podle konstrukce bodu  $B_2''$  platí  $|B_2C_2| = |B_2''C_2''|$  a  $C_2C_2'' \parallel B_2B_2'' \parallel s_2$ . Bude tedy také platit  $|D_2E_2| = |D_2''E_2''|$ , přičemž  $D_2 \in m_2$ ,  $D_2'' \in k_2$ ,  $E_2 \in k_2$ ,  $E_2'' \in m_2 = k_2''$ . Protože směr světla  $D_2D_2'' \parallel E_2E_2''$  svírá se společnou osou  $o_2$  obou ploch úhel  $45^\circ$ , platí:  $|D_2E_2| = |E_2D_2''| = |D_2''E_2''|$  a  $|O_2E_2| : |E_2D_2| = 1 : 2$ . Naneseme-li tedy na hranu  $a = PQ$  délku  $2r = P^1E$ , protíná spojnice  $O^1E$  kružnici  $m$  v bodě  $D$ , jehož vržený stín  $D''$  je vrženým stínem bodu  $D$  na osvětlenou část kulové plochy.

Protože kulová plocha  $\Psi$  a světelný válec  $(s, m)$  mají společnou kružnici  $m$ , je vrženým stínem kružnice  $m$  dovnitř kulové plochy opět kružnice, jejímž průmětem je elipsa  $m_2''$ , která je určena hlavní poloosou  $O_2A_2$  a bodem  $D_2''$ . Průmět vrženého stínu  $m_2''$  kruhové hrany  $m$  na kulovou plochu  $\Psi$  je afinně sdružený s obrysovou kružnicí  $m_2$  ve směru průmětu světelného paprsku  $s_2$  s charakteristikou afinity  $1 : 3$ .



Obr. 31

## 6.6 Osvětlení skupiny těles - praktický příklad

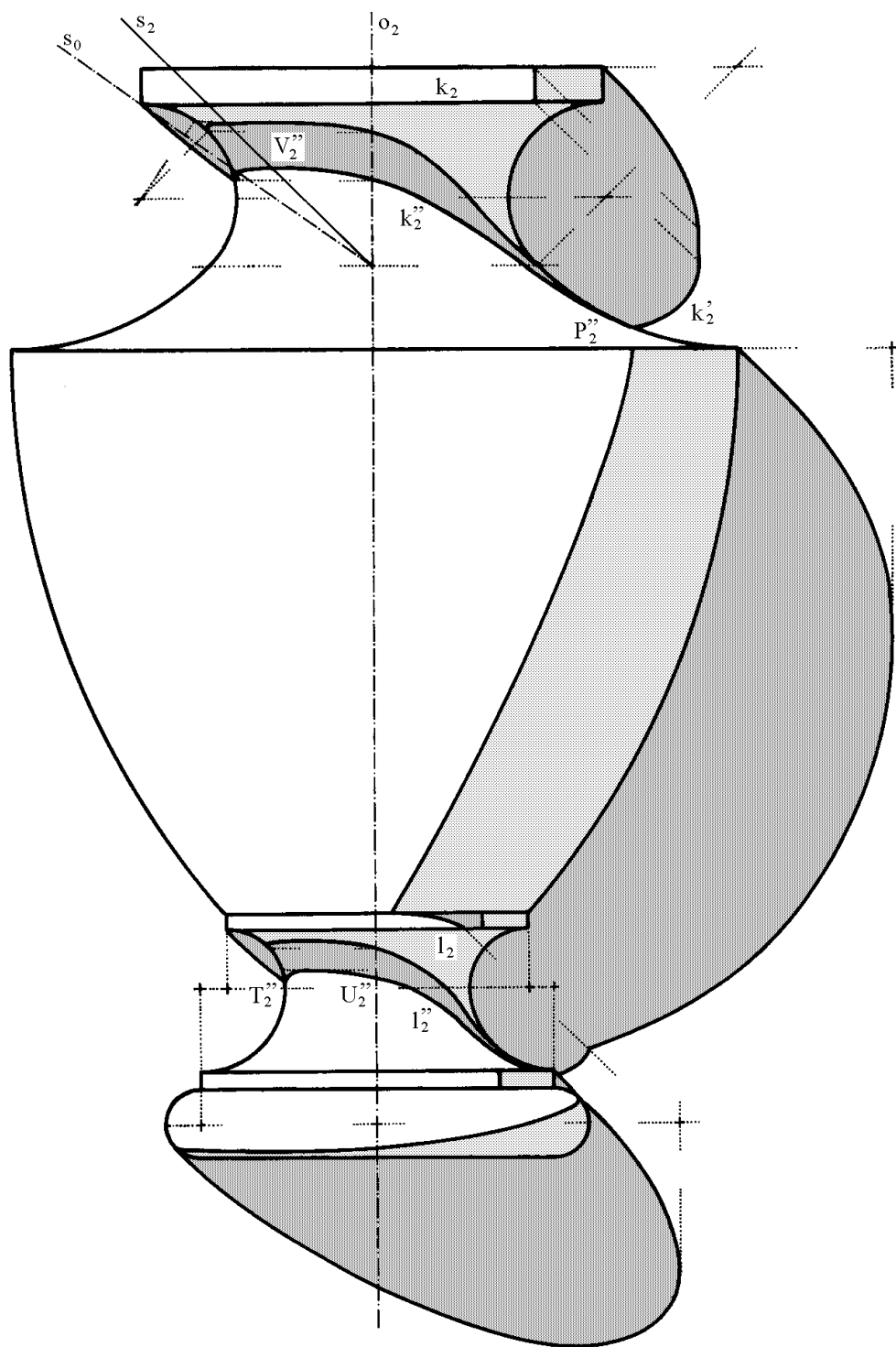
Obdobně jako v předešlých kapitolách můžeme s výhodou užít pomocné Piletovy roviny  $\mu$  k určování vrženého stínu jedné (obecné) rotační plochy na druhou sousou rotační plochu. K sestrojení těchto vržených stínů lze též užít vržených stínů daných ploch na druhou průmětnu jdoucí osou  $o$  rotace. Tato cesta by však v mnohých případech byla pracnější a výsledek méně přesný. Navíc mnohdy uvažujeme pouze o samotném rotačním tělese v prostoru, a proto ani jeho vržený stín na druhou průmětnu nepotřebujeme.

Na obrázku 32 je zobrazena váza. Při jejím osvětlování je užito konstrukcí, které jsme si v předchozích kapitolách popsali. Bod  $V''$  získáme pomocí otočení světelného meridiánu do nárýsny  $\nu$ . Vržený stín  $k'$  kružnice  $k$  protíná obrys dané vázy v bodě  $P''$ , který je koncovým bodem nárýsu vrženého stínu kružnice  $k$  na vázu. Otočením bodu  $U''$ , v němž vržený stín kružnice  $l$  protíná nárýs osy  $o$ , o  $90^\circ$ , získáme další bod meze vrženého stínu na obryse.

Chceme-li vyřešit vržený stín nějakého rotačního tělesa na rovinu rovnoběžnou s nárýsnou  $\nu$  ve vzdálenosti  $y$ , posuneme vržený stín na nárýsnu 'vpravo a dolů' o délku  $y$  (obr. 33).

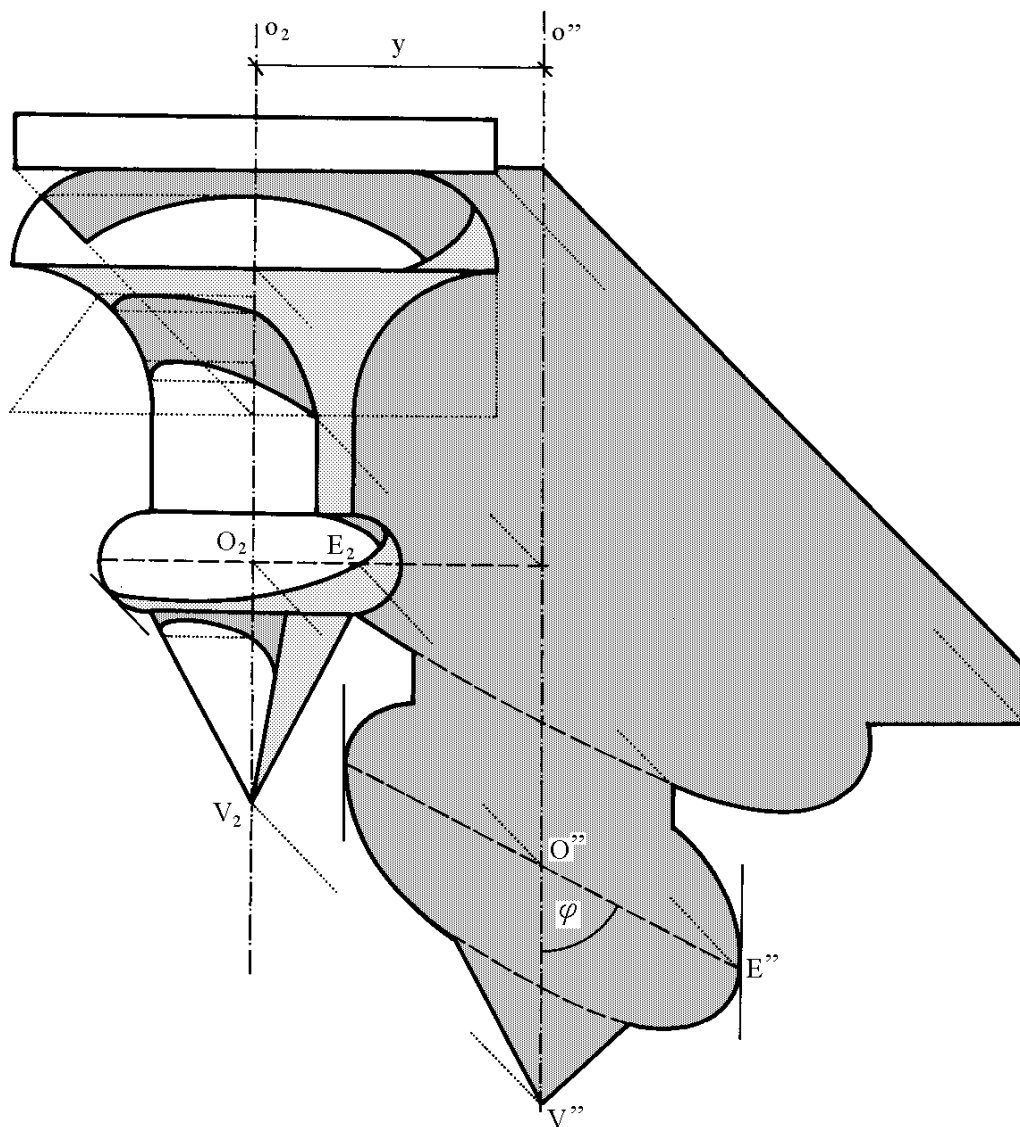
Nejdříve sestrojíme vlastní stíny jednotlivých těles a dále pak vržené stíny tělesa na těleso skupiny. Použijeme přitom metody, které jsme odvodili pro skupiny těles s osou ležící v nárýsně  $\nu$ . Dále pak sestrojíme vržený stín  $o''$  osy  $o$  na nárýsnu a na něm stíny středů podstav daných těles. Vržené stíny těles mají vzhledem ke stínu  $o''$  tutéž vzájemnou polohu, jakou měly stíny sousých rotačních těles s osou  $o$  ležící v nárýsně, vzhledem k této nárýsně. Na nárýsnu však budou navíc vrhat svůj stín i body ležící na zadní polovině těles. Tyto stíny musíme nalézt.

Jelikož celá skupina je souměrná podle osy  $o$ , bude i vržený stín zadní poloviny těles mít mez vrženého stínu souměrnou s již obdrženou mezí podle vrženého stínu  $o''$  osy  $o$ . Jedná se o šikmou souměrnost, jejíž směr sestrojíme jako vržený stín úsečky  $OE$ , která svírá s nárýsnou úhel  $45^\circ$  a je vodorovná.  $O''E''$  je tedy směr šikmé osové souměrnosti obou částí meze vrženého stínu soustavy na nárýsnu, jejíž osou je  $o''$ . Lze ukázat, že pro úhel  $\varphi$  platí  $tg\varphi = 2 : 1$ .



Obr. 32



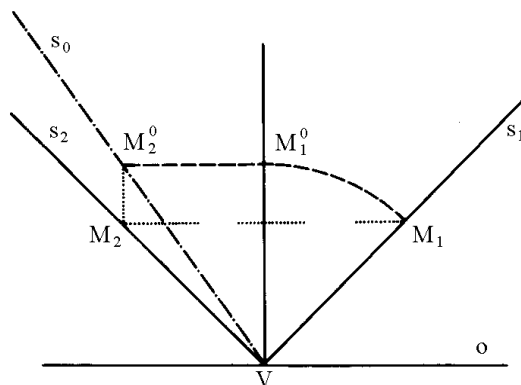


Obr. 33

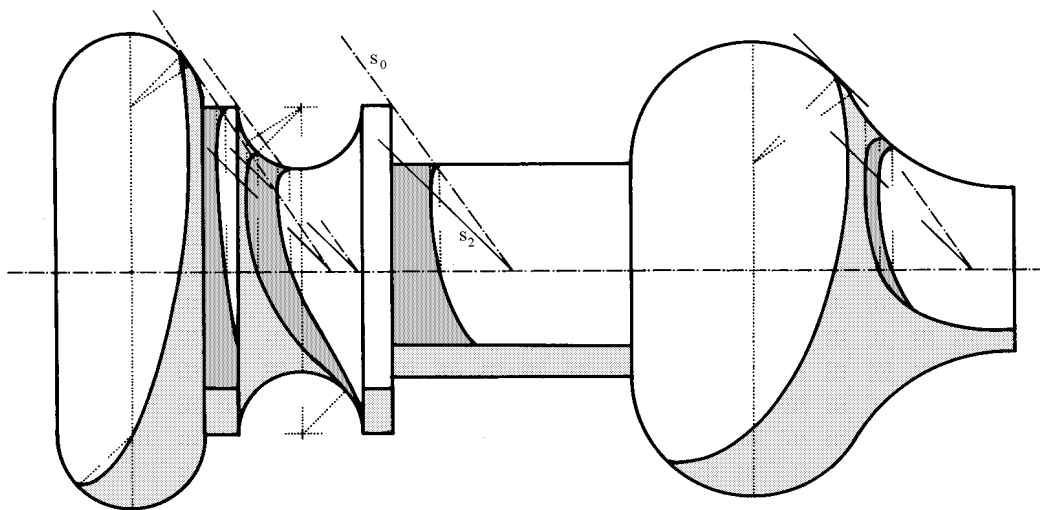
## 7 Rotační tělesa s vodorovnou osou

Prozatím jsme sestrojovali vlastní a vržené stíny rotačních těles se svislou osou rotace. Kdybychom některé z těchto těles sklonili tak, aby osa rotace tělesa přešla do vodorovné polohy, musíme také daný paprsek přizpůsobit této poloze. Paprsek  $s_2$  je stejný jako v předešlých příkladech (dopadá z levého horního rohu pod úhlem  $45^\circ$ ). První obraz paprsku  $s_1$  k němu vedeme na obraze opět, ale z pravé strany k levé (viz. obr. 34). Otočíme paprsek  $s_1$  kolem vrcholu  $V$  světelného kužele. Rovina otáčení každého bodu tohoto paprsku je kolmá k ose rotace (v tomto případě je svislá). Otočený paprsek, t.j. obraz povrchové přímky světelného kužele, vytvářeného otáčením paprsku, přejde do polohy  $s_0$  (odchyluje se od  $s_2$  vpravo).

Vlastní a vržené stíny vyšetřujeme v tomto případě pro stanovené směry paprsků  $s_2$  a  $s_0$ . Ostatní konstrukce zůstávají stejné. Jsou jasné z obrázku 35.



Obr. 34



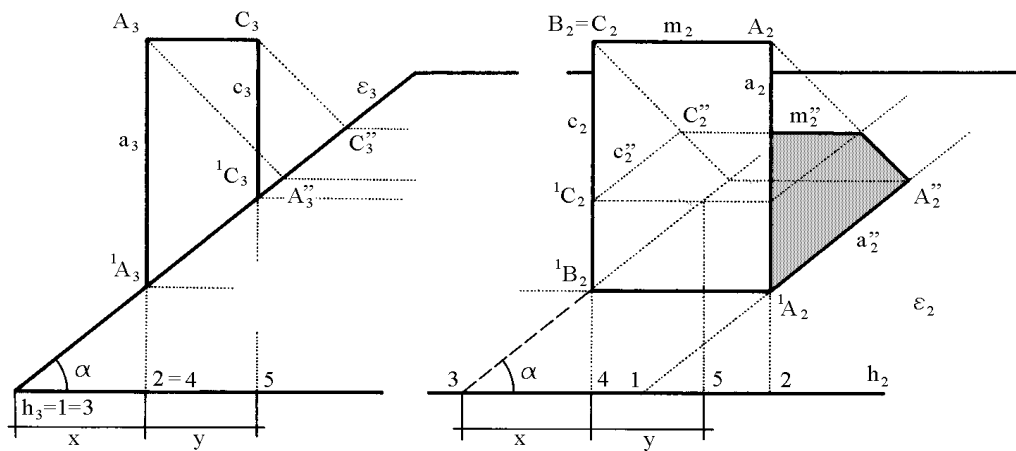
Obr. 35

## 8 Vržený stín na šikmou rovinu

V této kapitole si ukážeme, jakým způsobem se sestrojují vržené stíny na šikmou rovinu se spádem  $\alpha$ . S těmito příklady se setkáváme v technické praxi, jestliže sestrojujeme technické osvětlení budov a zjišťujeme vržené stíny různých komínů, vykýřů atd. na šikmou střechu.

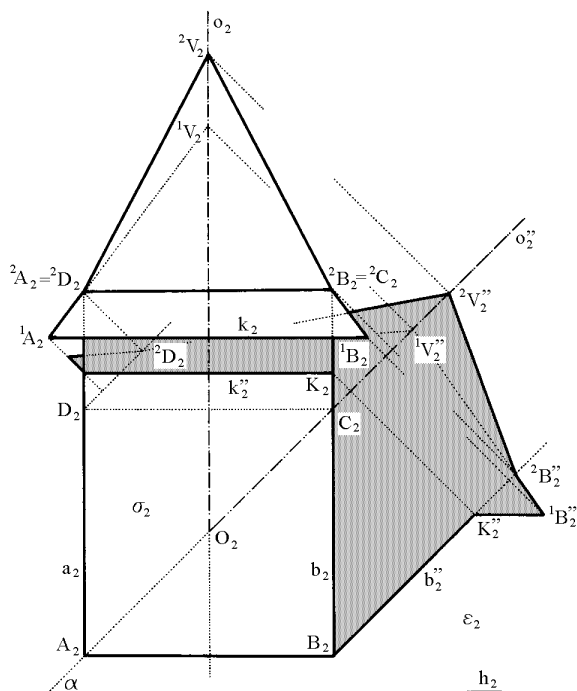
### 8.1 Osvětlení střech

Zvolme si střešní rovinu  $\varepsilon$  s vodorovnou římsovou hranou  $h$  (obr. 36). Spád roviny  $\varepsilon$  vzhledem k vodorovné rovině je roven  $tg\alpha$ . Dále nechť je dán svislý hranol, jehož dvě stěny jsou průčelné a dvě kolmé k nárysně  $\nu$ . Kromě nárysu použijeme též bokorysu. Pomocí něho vidíme, že  $\triangle A_2^1 A_2 A_2''$  a  $\triangle A_3^1 A_3 A_3''$  jsou shodné. Bod  $A''$  je nárys vrženého stínu bodu  $A$ , ležícího na svislé hraně  $a$ , směrem světelného paprsku  $s$  na rovinu  $\varepsilon$ . Vrženým stínem svislé hrany  $a$  na rovinu  $\varepsilon$  je úsečka  $^1 A_2 A_2''$ . Z výše uvedených shodných trojúhelníků je vidět, že nárysy vržených stínů svislých přímek na roviny rovnoběžné s osou  $x$  a svírající s půdorysnou úhel  $\alpha$ , procházejí nárysy průsečíků těchto přímek s danými rovinami, a to v téměř úhlu  $\alpha$  k ose  $x$ . Z obrázku je patrné, že  $\triangle ^1 A_1 2 \cong \triangle ^1 A_3 h_3 2$ ; platí  $|h_3 2| = |1 2|$  na  $h_2$ . Vodorovnou vzdálenost bodu  $^1 A_2$  roviny  $\varepsilon$  od hrany  $h$  určíme tak, že nárysem  $^1 A_2$  vedeme kolmici  $^1 A_2 2 \perp h_2$  a dále pak přímkou  $^1 A_2 1$  v úhlu  $\alpha$ . Tyto přímky vytknou na  $h$  úsečku, která je hledaným intervalem. Současně je vidět, že  $|4 5|$  je rovno tloušťce svislého hranolu.



Obr. 36

## 8.2 Vržený stín věžičky



Obr. 37

bod  $K$  převedeme světelným paprskem na  $b''$  do bodu  $K''$ . Bodem  $K_2''$  jde vržený stín hrany  $k$  rovnoběžné s  $h$  ( $h \dots$  římsová hrana,  $h \parallel x$ ) a je ukončen vrženým stínem bodu  ${}^1B$ . Bod  ${}^2B$  leží na svislé hraně  $b$ , proto jeho vržený stín  ${}^2B''$  leží na  $b''$ . Sestrojíme střed  $O$  obdélníka, jímž dosedá daná věžka na  $\varepsilon$ . Bodem  $O_2$  pak prochází nárys  $o_2''$  vrženého stínu svislé přímky  $o$ , na níž leží body  ${}^1V, {}^2V$ . Průsečíky nárysu světelných paprsků jdoucích body  ${}^1V$  a  ${}^2V$  s nárysem osy  $o''$  nám určí příslušné vržené stíny  ${}^1V'', {}^2V''$ .

Z obrázku je patrné, že světelná rovina  $\kappa$  procházející hranou  $a$  obsahuje bod  $A$ , svislou přímku  $o$  i hrany  $C^2C, {}^2C^2V$ . Společný vržený stín je přímka  $o''$ , která svým nárysem  $o_2''$  prochází bodem  $A_2$ . Nakonec doplníme vržený stín stínem hrany  ${}^2D^2V$ .

## 8.3 Vržený stín válcového komínu

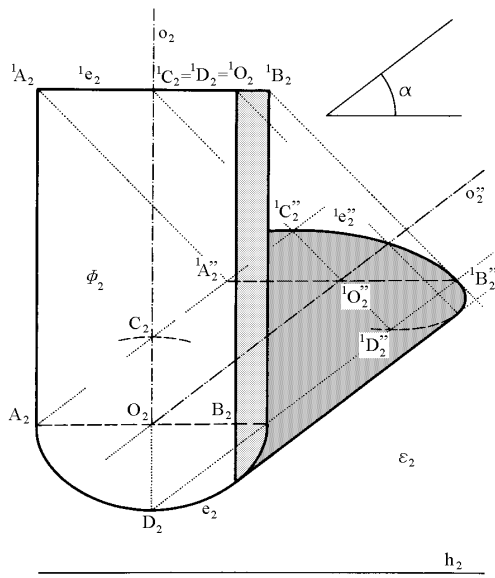
Mějme danu střešní rovinu  $\varepsilon$  se spádem  $tg\alpha$  (obr. 38). Válcová plocha  $\Phi$  o svislé ose  $o$  a poloměru  $r$  protíná  $\varepsilon$  v elipse  $e$ . Jejím nárysem  $e_2$  je elipsa, jejíž jedna osa je rovnoběžná s římsovou hranou  $h_2$  a je rovna  $2r$ . Poměr obou

Mějme danu úhlovou střechu, rovina střechy  $\varepsilon$  zde svírá s půdorysnou  $\pi$  a nárysnou  $\nu$  úhel  $45^\circ$ . V tomto případě budou intervaly, o kterých jsme se zmínili v předšlém odstavci (obr. 36), rovny přímo vzdálenostem nárysu průsečných hran průčelných svislých rovin se střešní rovinou  $\varepsilon$ . Z toho je patrné, že při úhlových střechách nárys střešní roviny se svislými tělesy postavenými na ní nám zobrazuje příslušný půdorys na afinně zkreslený (viz. obr. 36), ale ve skutečném tvaru.

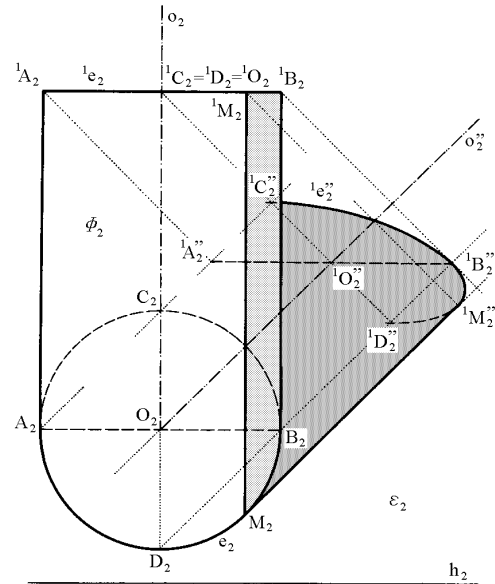
Na obrázku 37 je dána věžka, jejíž podstavu tvoří čtvercový hranol a nad ním je stanová střecha o vrcholu  $V$ . Hrana  $b$  protínající  $\varepsilon$  v bodě  $B$  vrhá stín  $b_2''$  jdoucí bodem  $B_2$  pod úhlem  $45^\circ$  vpravo. Sestrojíme vržený stín  $k''$  hrany  $k$  na přední stěnu  $\sigma$  věžky, koncový

poloos elipsy  $e_2$  je dán hodnotou  $\operatorname{tg}\alpha$ . Vrženými stíny  ${}^1A''$ ,  ${}^1B''$ ,  ${}^1C''$ ,  ${}^1D''$  bodů  ${}^1A$ ,  ${}^1B$ ,  ${}^1C$ ,  ${}^1D$  kružnice  ${}^1e$  plochy  $\Phi$  na  $\varepsilon$  je určen vržený stín  ${}^1e''$  na  $\varepsilon$ .

Je-li  $\operatorname{tg}\alpha = 1$  (obr. 39), je křivka  $e_2$  kružnicí. V obrázku byl sestrojen bod  ${}^1M''$ , v němž se dotýká vržený stín  ${}^1e''$  kružnice  $e$  vrženého stínu válcové plochy  $\varepsilon$ . Bod  ${}^1M$  leží v Piletově rovině  $\mu$ .



Obr. 38

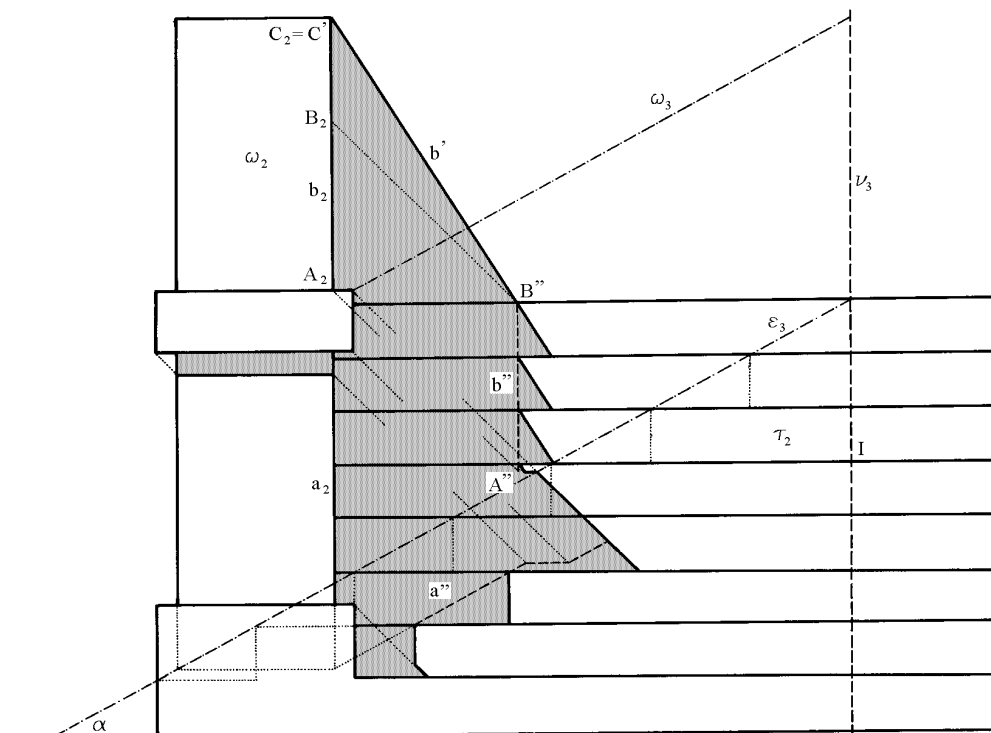


Obr. 39

## 9 Osvětlení schodišť

Na obrázku 40 je dáno schodiště se zábradlím. Máme-li provést jeho osvětlení, proložíme si předními hranami schodů rovinu  $\varepsilon$ . V obrázku si vyznačíme i pomocný bokorys, z něho je patrné, že rovina  $\omega$  zábradlí je rovnoběžná s rovinou  $\varepsilon$ . Vržený stín hran  $a, b$  zábradlí na rovinu  $\varepsilon$  se zobrazí do přímek  $a''$  a  $b''$ . Vržený stín  $A''B''$  je rovnoběžný s  $b$ , spojnice  $B''C'$  nám dává nárys  $b'$  vrženého stínu hrany  $b$  do nárysny  $\nu$ . Nyní za pomoci afinity mezi stíny na rovinu  $\varepsilon$  a na jednotlivé průčelné roviny schodů sestrojíme vržený stín zábradlí na jednotlivé stupně v nárysu. Nárysy vrženého stínu na rovinu  $\varepsilon$  a průčelnou rovinu  $\tau$  určitého stupně daného schodiště jsou ve vztahu afinity, jejíž osou je nárys hrany příslušného stupně (v našem případě hrana  $I$ ),  $s_2$  je jejím směrem.

Svislým přímkám a těm, které svírají s osou  $x$  úhel  $\alpha$  v nárysu roviny  $\varepsilon$ , odpovídají v nárysu průčelné stěny stupně přímky směru  $b'$  a svislé přímky.



Obr. 40

## 10 Technické osvětlení v zobrazovacích metodách

V předešlých kapitolách jsme si ukázali konstrukce stínů při technickém osvětlení, ale skoro ve všech případech jsme užili zobrazení na jednu průmětnu (nejčastěji nárysnu  $\nu$ ). Vlastnosti technického osvětlení nám umožňují použití pouze jedné průmětny.

Při výuce jednotlivých zobrazovacích metod se však často setkáváme s úlohou sestavit technické osvětlení daného tělesa nebo skupiny těles v daném druhu promítání a je jedno, jedná-li se o promítání rovnoběžné (paralelní) či středové. V následujících několika kapitolách si ukážeme na jednotlivých příkladech sestavování technického osvětlení v Mongeově promítání, axonometrickém promítání a lineární perspektivě.

U jednotlivých konstrukcí se předpokládá základní znalost daných druhů zobrazení. Popis konstrukcí proto nebude příliš podrobný a jednotlivé příklady slouží spíše jako ukázka sestavování technického osvětlení v dané zobrazovací metodě.

### 10.1 Kolmé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny

Nejjednodušší a nejlehčí zobrazení užívané v deskriptivní geometrii je pravoúhlé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny, které též stručně nazýváme *Mongeovo promítání*<sup>8</sup>.

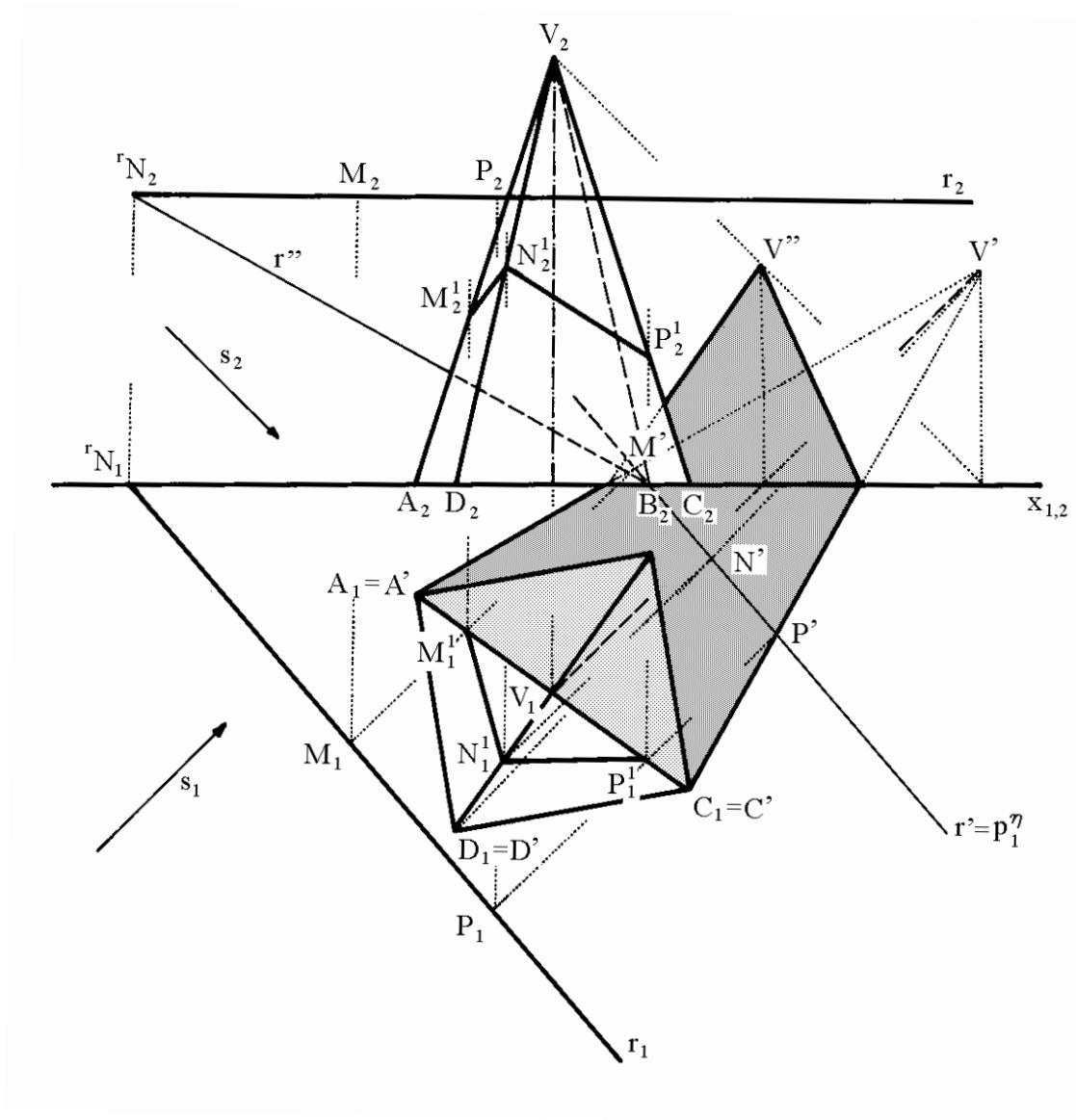
**Úloha 1:** *V Mongeově promítání sestrojte technické osvětlení přímky a pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavou v půdorysně (obr. 41).*

Nejdříve sestojíme vržený stín jehlanu na půdorysnu. Určíme vržený stín  $V'$  vrcholu jehlanu. Protože podstava jehlanu leží v půdorysně, splývá její vržený stín s jejím půdorysem ( $A_1 = A'$ ,  $B_1 = B'$ , ...). Obrys vrženého stínu na půdorysnu je tedy určen vrcholy  $V'$ ,  $C'$ ,  $D'$ ,  $A'$ . Podobně bychom sestrojili vržený stín jehlanu na nárysnu.

Z vrženého stínu na půdorysnu rýsuje zpravidla jen tu část, která leží před nárysnou, protože jenom ta ve skutečnosti vzniká. Stejně se rýsuje z vrženého stínu na nárysnu jen část, ležící nad půdorysnou. Vržené stíny jednotlivých hran na půdorysnu a nárysnu se protínají na základnici, stačí tedy, stanovíme-li jen vržený stín  $V''$  vrcholu  $V$  na nárysnu. Ten pak spojíme s průsečíky úseček  $V'A'$ ,  $V'C'$  s osou  $x$ . Tím je vržený stín jehlanu vyřešen. Z obrázku je patrné, že meze vlastního stínu na plášti jsou pobočné hrany  $VA$ ,  $VC$ .

---

<sup>8</sup>**Gaspard Monge:** (1746-1818), francouzský matematik. Ve svém díle '*Geometrie descriptive (Leçons données aux Ecoles normales, lan III de la république)*', *Journal des Ecoles Normales*, t. I.-IV., Paris 1799 toto promítání přesně vyložil a zároveň ukázal jeho užití k soustavnému řešení prostorových konstrukčních úloh.



Obr. 41



Nyní ještě sestrojíme osvětlení přímky  $r$ . Jelikož přímka je blíže světelnému zdroji než jehlan, vrhá část této přímky svůj stín na jehlan. Světelná rovina  $\eta$  jdoucí přímkou  $r$  nám protíná půdorysnu v průsečnici  $r'$ , která je vrženým stínem přímky  $r$  na půdorysnu. Přímka  $r$  vrhá na jehlan stín, který je částí průsečného mnohoúhelníka v němž světelná rovina  $\eta$  protíná jehlan. Jednotlivé vrcholy  $M^1, N^1, P^1$  určíme pomocí zpětných paprsků, vedených z průsečíků vržených stínů pobočných hran s přímkou  $r'$ .

## 10.2 Axonometrické promítání

Mongeova projekce je jedna z nejjednodušších zobrazovacích metod. Nevýhodou však je provádění dvou sdružených průmětů a ztráta názornosti při speciálních polohách útvarů. Vhodným názorným zobrazením, které poskytuje možnost přímých, snadno proveditelných konstrukcí je tzv. *axonometrické zobrazení*.

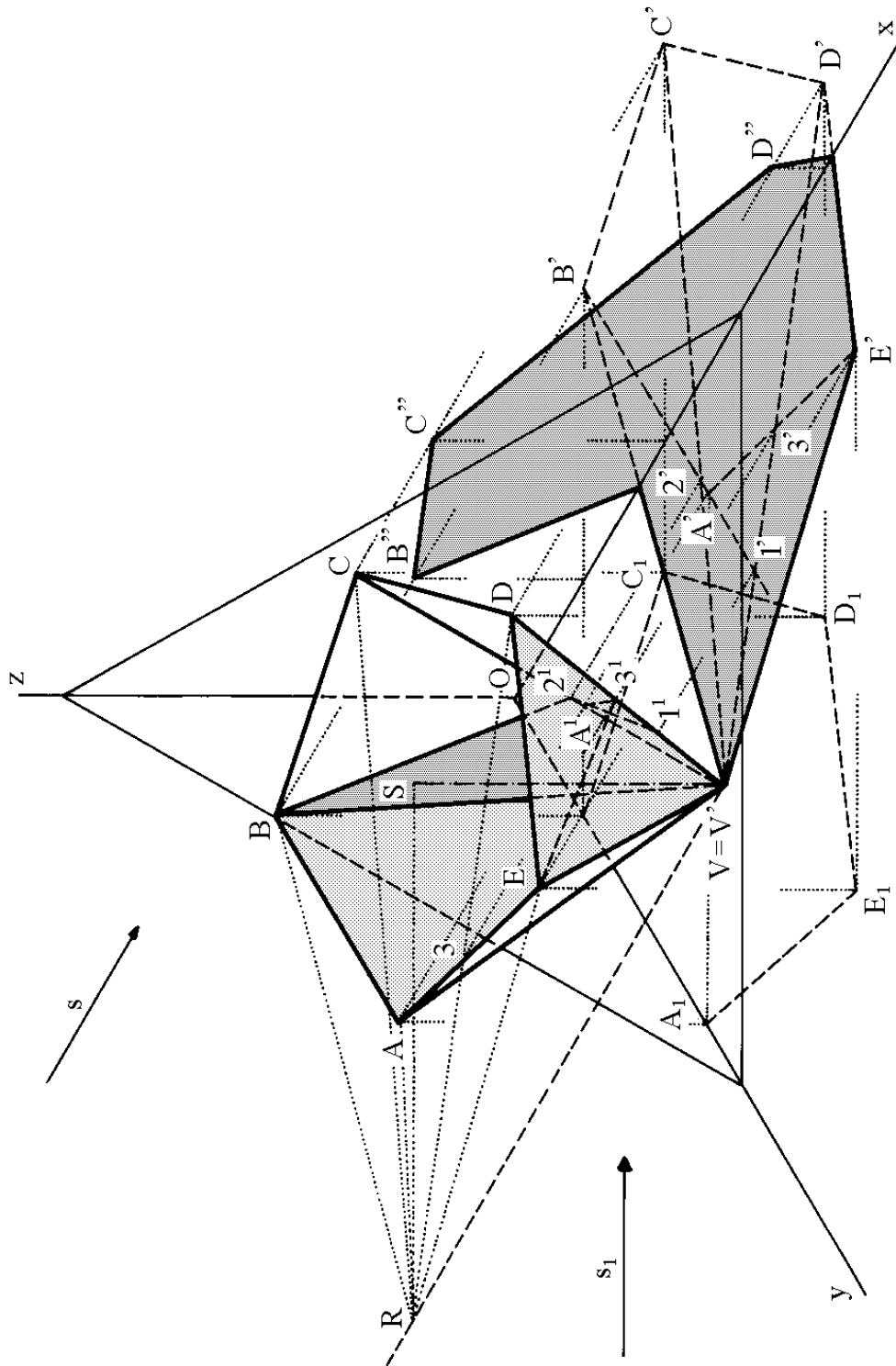
Ukažme si nyní dva příklady. První bude řešen v kolmé axonometrii a druhý ve zvláštním případě axonometrického promítání, tzv. kosoúhlém promítání.

**Úloha 2:** *V izometrii sestrojte technické osvětlení pláště pravidelného pětibokého jehlanu, jehož podstava je v rovině rovnoběžné s  $\pi \equiv (xy)$ , hrana  $AB$  leží v rovině  $(yz)$  a jeho vrchol  $V$  leží v rovině  $\pi$  (obr. 42).*

Protože se jedná o osvětlení dutého jehlanu, je nutno vyšetřit kromě jeho vlastního a vrženého stínu také jeho vržený stín do dutiny. Mez vlastního stínu na vnějším povrchu pláště je určena vrcholy  $V, E, D, C, B$ . Můžeme ji stanovit například pomocí meze vrženého stínu do půdorysny. Světelné roviny, jdoucí jednotlivými pobočnými hranami jehlanu, tvoří svazek rovin, jehož osou je světelný paprsek jdoucí vrcholem  $V$ . Světelné roviny, jejichž průsečnice s rovinou podstavy procházejí bodem  $R$  (průsečíkem světelného paprsku, jdoucího vrcholem jehlanu, s rovinou podstavy) a body  $E, B$  podstavy, jsou rovinami styčnými a tedy hrany  $EV$  a  $BV$  tvoří mez vlastního stínu na plášti.

Vržený stín  $A'$  bodu  $A$  leží uvnitř vrženého stínu, tudíž hrany  $EA$  a  $AB$  vrhají stín na jehlanovou plochu. Vržený stín  $A^1$  bodu  $A$  na plochu je určen pomocí zpětného paprsku. Vržený stín  $A'B'$  hrany  $AB$  protíná vržený stín  $V'C'$  v bodě  $2'$ , stín  $V'D'$  hrany  $VD$  v bodě  $1'$  (po prodloužení). Vedeme tedy body  $2'$  a  $1'$  zpětné světelné paprsky a zjistíme průsečíky  $2^1, 1^1$  těchto paprsků s příslušnými hranami plochy. Lomená čára  $B2^11^1$  je vrženým stínem prodloužené hrany  $AB$  na stěny  $BCV$  a  $CDV$  plochy. Musí tedy na této čáře ležet i vržený stín  $A^1$  bodu  $A$ . Bodem  $A'$  vedeme proto zpětný paprsek, který lomenou čáru  $B2^11^1$  protne v bodě  $A^1$ . Bod  $3^1$  získáme opět pomocí zpětného paprsku z bodu  $3'$ .

Body  $A^1, 2^1, 3^1$  můžeme však určit také bez použití zpětných paprsků, totiž jako průsečíky světelných paprsků bodů  $A, 2, 3$  hran  $EA, AB$  s pláštěm jehlanu. Vrcholové roviny, obsahující uvedené světelné paprsky, tvoří svazek rovin, jehož osou je světelný paprsek jdoucí vrcholem  $V$ . Průsečnice tohoto svazku rovin s ro-



Obr. 42

vinou podstavy tvoří svazek paprsků, jehož středem je již dříve popsán bod  $R$ . Chceme-li tedy určit např. bod 3, který vrhá stín na hranu  $VD$ , proložíme světelnou rovinu touto hranou a její průsečík s hranou  $AE$  je hledaný bod 3, který vrhá stín do bodu  $3^1$ .

Výše popsanými způsoby dostaneme lomenou čáru  $B2^1A^13^1E$ , která je mezi vrženého stínu plochy na vnitřní část jehlanové plochy.

**Úloha 3:** *V technickém kosouhlém promítání sestrojte technické osvětlení pravidelného trojbokého jehlanu s podstavou v rovině rovnoběžné s  $\pi$  a pravidelného šestibokého jehlanu s podstavou v  $\pi$  (obr. 43).*

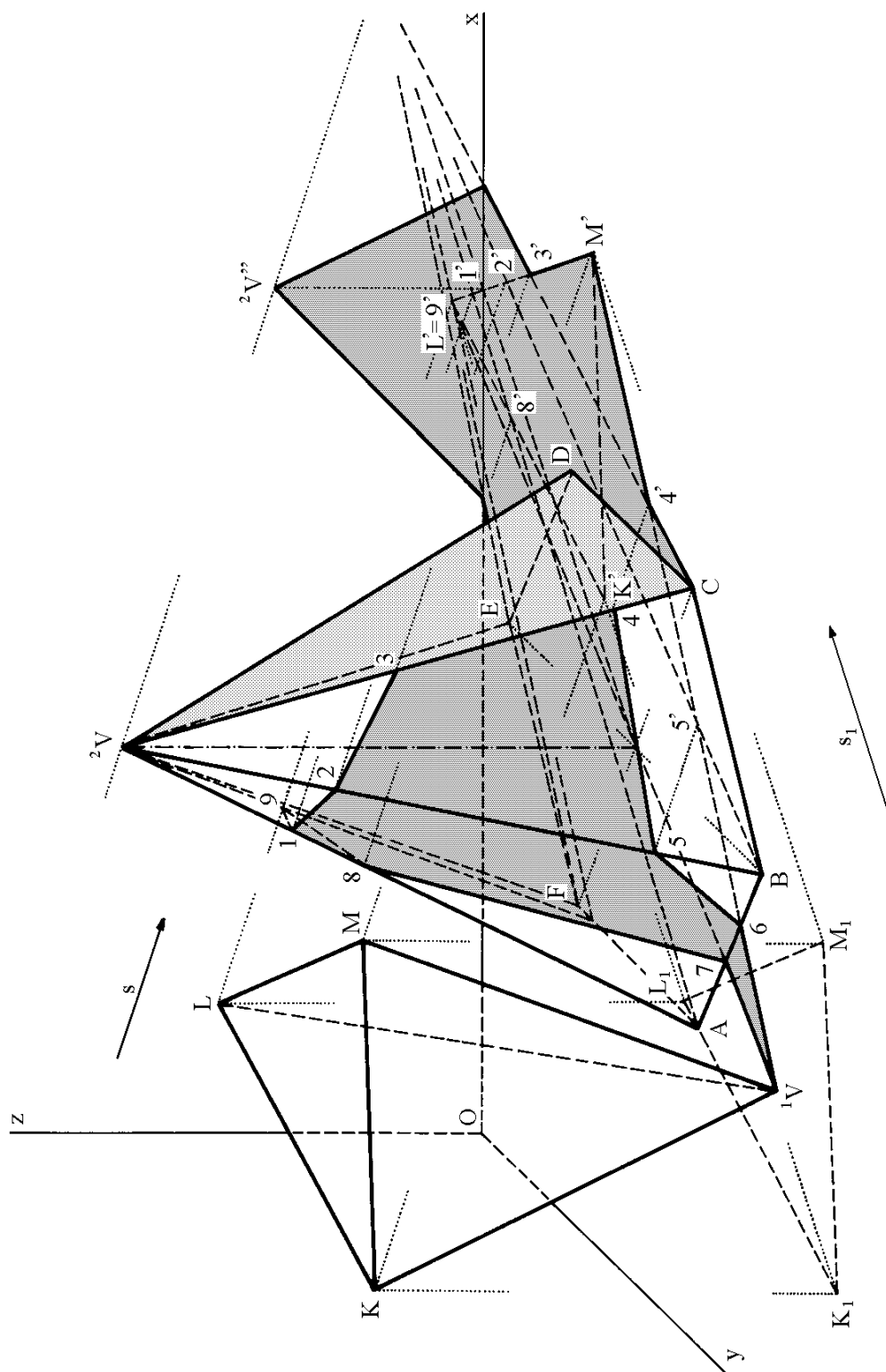
Meze vlastního a vrženého stínu pro oba jehlany sestrojíme stejným způsobem jako v předešlých příkladech. Jelikož trojboký jehlan je blíže světelnému zdroji než jehlan šestiboký, je část jeho vrženého stínu zachycena na tomto jehlanu. Zbytek vrženého stínu pak leží v půdorysně  $\pi$ .

Mez vlastního stínu na trojbokém jehlanu je určena vrcholy  $L, M, V$ . Jelikož platí, že mez vrženého stínu je vrženým stínem meze vlastního stínu, bude obrys vrženého stínu na druhý jehlan tvořen částmi průseků světelných rovin proložených hranami  $LM, MV$  a  $VL$  meze vlastního stínu. Jednotlivé vrcholy obrysu sestrojíme například pomocí zpětných paprsků.

Obrys tohoto vrženého stínu lze považovat též za část průniku šestibokého jehlanu se světelným hranolem, který je tvořen *styčnými rovinami*<sup>9</sup> trojbokého jehlanu.

---

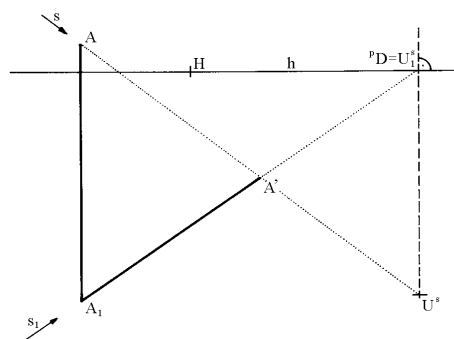
<sup>9</sup>**Styčná rovina** jehlanové plochy má s ní společnou jen hranu nebo stěnu.



Obr. 43

### 10.3 Lineární perspektiva

Při rovnoběžném osvětlení v lineární perspektivě je směr světelných paprsků dán úběžníkem  $U^s$  a úběžníkem jejich půdorysů  $U_1^s$ , který leží na horizontě  $h$ . Úběžnice  $U^s U_1^s \perp h$  je úběžnicí vertikálních rovin, proložených světelnými paprsky, nebo úběžnicí světelných rovin svislých přímek. Vrženým stínem bodu  $A$  na základní rovinu je průsečík  $A' = AU^s \cap A_1U_1^s$ , kde  $A_1U_1^s$  je stopa vertikální roviny určené bodem  $A$  a směrem světelných paprsků (viz. obr. 44).



Obr. 44

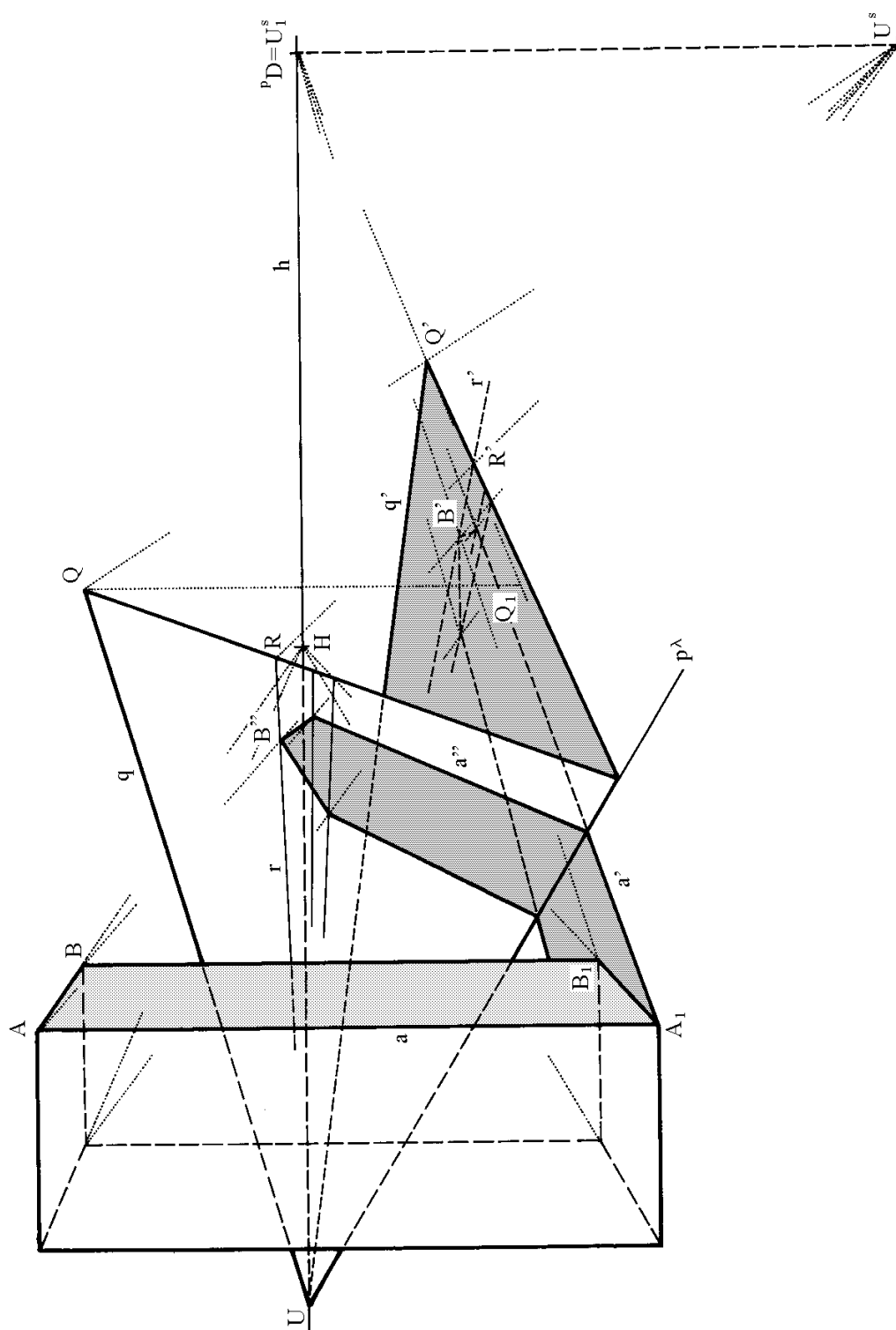
Volíme-li technické osvětlení, leží bod  $U_1^s$  v pravém distančníku  ${}^pD$ . Při větší distanci se nám mohou úběžníky  $U^s$  a  $U_1^s$  dostat mimo nákresnu, v tom případě je potřeba použít k sestrojení stínů např. pomocného perspektivního pravítka.

**Úloha 4:** V lineární perspektivě sestrojte technické osvětlení čtyřbokého sloupu ležícího v základní rovině a roviny  $\lambda$  v obecné poloze (obr. 45).

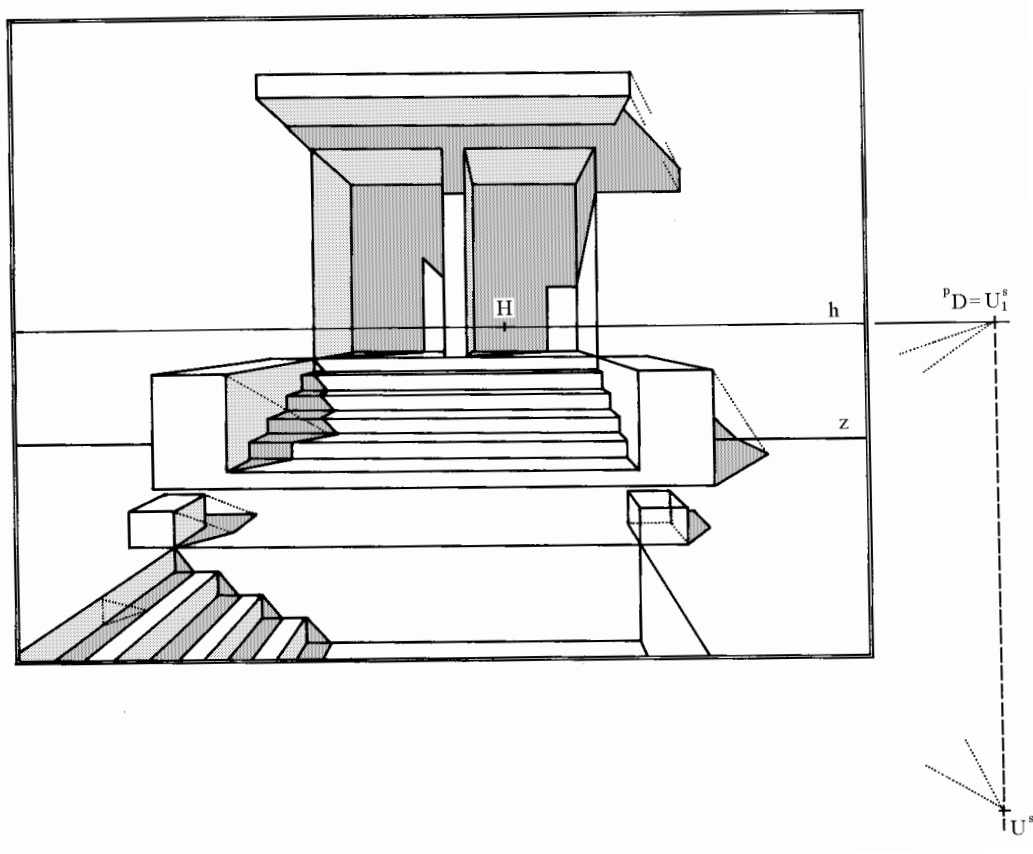
Rovina  $\lambda$  je omezena stopou  $p^\lambda$  a hlavní přímkou  $q$  o společném úběžníku  $U$ . Úběžník světelných paprsků označme  $U^s$ , úběžník jejich půdorysů  $U_1^s \equiv {}^pD$ .

Bod  $B$  vrhá svůj stín na základní rovinu do bodu  $B'$  ( $B \in BU^s \cap B_1U_1^s$ ). Vržený stín roviny  $\lambda$ , určené stopou  $p^\lambda$  a bodem  $Q$ , je omezen pomocí vrženého stínu bodu  $Q$  ležícího na hlavní přímce  $q$ . Vržený stín  $B''$  bodu  $B$  na rovinu  $\lambda$  určíme pomocí vrženého stínu  $r'$  příslušné hlavní přímky roviny  $\lambda$  (přímka  $r'$  prochází bodem  $B'$ ). Z bodu  $R'$  je odvozen bod  $R$ , jímž prochází přímka  $r$ . Tato hlavní přímka protíná paprsek  $BU^s$  ve vrženém stínu  $B''$ . Podobně sestrojíme z obrysu vrženého stínu na základní rovinu zbývající hrany obrysu vrženého stínu na rovinu  $\lambda$ .

Uplatněním konstrukcí z předešlé úlohy je na obrázku 46 sestrojeno technické osvětlení prvků vstupní části budovy.



Obr. 45



Obr. 46

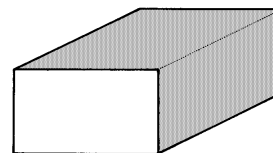
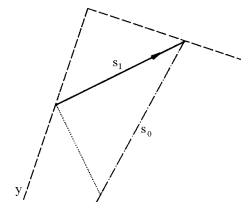


## 11 Užití technického osvětlení

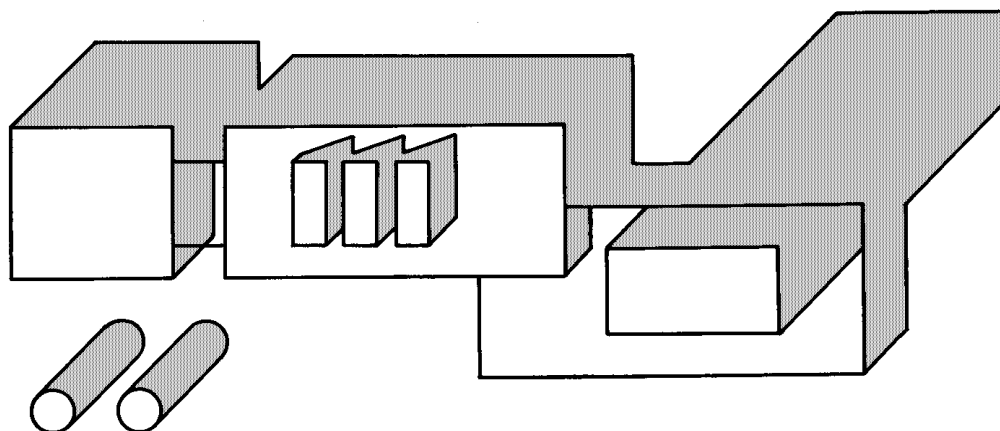
Jak jsem již napsal v úvodní části, výhoda technického osvětlení je ta, že k zobrazení daných obrazců a těles nám stačí pouze jediný pravoúhlý průmět, neboť vzdálenosti daných bodů od průmětny jsou již určeny příslušnými vrženými stíny. Připojíme-li např. k půdorysu (obr. 47) technické osvětlení, je prostorový útvar dán kolmým a k němu sdruženým kosoúhlým průmětem, tím je v prostoru dokonale určen. Proto lze například z půdorysu (obr. 48) komplexu továrních budov vyčíst nejen šířky a délky zobrazených budov, ale též příslušné výšky. Obrys vrženého stínu je zde totožný s vojenskou perspektivou daných budov.

Asi největší uplatnění nachází technické osvětlení v současné době na stavebních výkresech. Hojně se ho užívá při zobrazování fasád objektů (obr. 49). Při konstrukci stínů a jejich odvození se užívá půdorysných i svislých řezů. Řezů bývá zpravidla tolik, kolik je jich třeba k určení všech ustupujících a vystupujících prvků fasády. Osvětlení se volí z pravé nebo levé strany, podle konfigurace fasádních prvků, aby ve výsledku byla co nejlépe vyjádřena plastičnost fasády.

Dalším druhem stavebních výkresů, kde se hojně využívá metod technického osvětlení jsou zastavovací studie (obr. 50), které jsou názorným zobrazením navrženého seskupení budov atp. Je však nutné podotknout, že směry paprsků, stanovené podle zásad technického osvětlení, nejsou vždy nejvýhodnější. Proto dáváme v některých případech přednost takovému směru paprsků, při kterém je délka stínu pro obraz nejpříznivější.



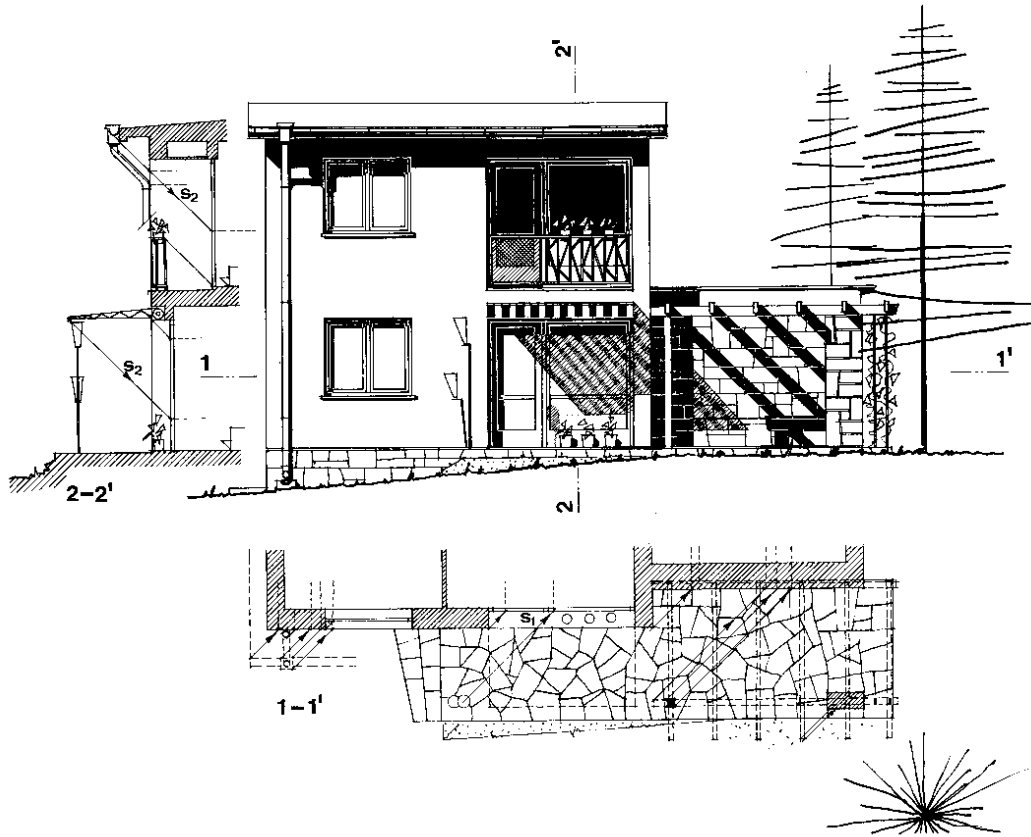
Obr. 47



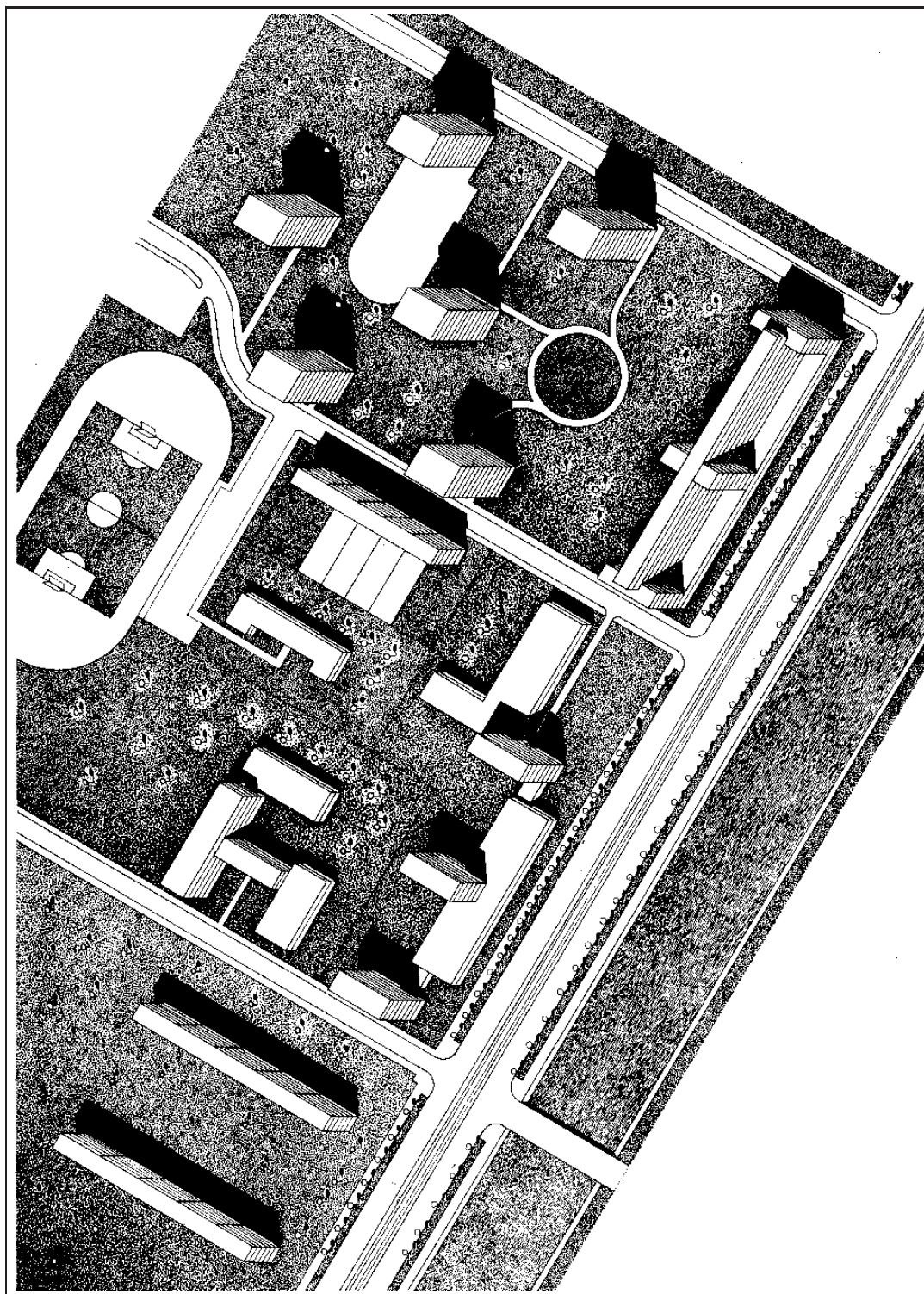
Obr. 48



Při provádění technického osvětlení se osvědčilo, jestliže výsledky nebyly vytahovány tvrdě podle křivítka, kružítkem nebo pravítkem, ale místo toho byl výsledek vytažen jen pevnou čarou jen tak od ruky. Výsledek tím ztrácí na geometrické tvrdosti a získává na působivosti.



Obr. 49



Obr. 50

# Literatura

- [1] F. Kadeřávek : *Technické osvětlení*, JČSMF, Praha, 1950
- [2] B. Ritschl, B. Ritschlová-Vaněčková : *Deskriptivní geometrie v praxi*, Česká grafická unie a.s., Praha, 1938
- [3] F. Veselý, J. Filip : *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie*, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952
- [4] O. Setzer : *Deskriptivní geometrie II*, SNTL, Praha, 1962
- [5] J. Klapka, R. Piska, J. Zezula : *Deskriptivní geometrie (pro směr stavební, zeměměřický a architekturu) I*, SNTL, Praha, 1954
- [6] Z. Kowalski, R. Piska : *Deskriptivní geometrie II*, skriptum VUT v Brně, SNTL, Praha, 1963
- [7] F. Kareřávek, J. Klíma, J. Kounovský : *Deskriptivní geometrie I, II*, JČSMF, Praha, 1932
- [8] F. Machala : *Rotační plochy*, skriptum Univerzity Palackého v Olomouci, Olomouc, 1992
- [9] J. Kounovský, F. Vyčichlo : *Deskriptivní geometrie*, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1959
- [10] V. Cibulka : *Odborné kreslení (Pro 1. a 2. ročník SPŠ stavebních)*, SNTL, Praha, 1980
- [11] O. Hajkr, J. Láníček : *Deskriptivní geometrie II*, Skriptum VŠ báňské v Ostravě, Ostrava, 1986
- [12] O. Hajkr, J. Láníček, E. Plocková, M. Řehák : *Sbírka řešených příkladů z konstruktivní geometrie*, Skriptum VŠ báňské v Ostravě, Ostrava, 1987
- [13] R. Piska, V. Medek : *Deskriptivní geometrie II*, SNTL, Praha, 1975
- [14] K. Drábek, F. Harant, O. Setzer : *Deskriptivní geometrie II*, SNTL, Praha, 1979