

**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ**

JIŘÍ VALA

MATEMATIKA
ANALYTICKÁ GEOMETRIE
KŘIVEK A PLOCH TECHNICKÉ PRAXE



DOPLŇKOVÝ MATERIÁL PRO SAMOSTATNÉ STUDIUM

Tento studijní materiál byl zpracován v rámci projektu *Multimediální podpora studia matematiky a deskriptivní geometrie na FAST VUT v Brně.*



OBSAH	3
-------	---

Obsah

1 Úvod	4
2 Přímký a křivky, roviny a plochy	6
3 Posouvání a otáčení souřadnic v rovině a v prostoru	12
4 Rovinné křivky, kvadratické křivky	18
5 Křivky jako průniky ploch, prostorové křivky	24
6 Vytváření ploch, přímkové a rotační plochy	31
7 Kvadratické plochy	42
8 Speciální přímkové plochy a konoidy	48
9 Rozvinutelné a zborcené plochy	61

1 Úvod

Studijní programy řádného studia stavebního inženýrství i stavitelství na FAST obsahují celý základní kurz matematiky v prvním ročníku studia: v zimním semestru v rozsahu 4+4 (hodiny přednášek a cvičení), v letním semestru v rozsahu 2+2. Deskriptivní geometrie je zařazena pouze do letního semestru v rozsahu 2+2. Obdobná situace je i u kombinovaného studia. V zimním semestru (lineární algebra, operace s vektory a jejich aplikace, diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné) se v přímé výuce analytická geometrie v praxi redukuje na využití operací s vektory v trojrozměrném euklidovském prostoru pro studium většinou lineárních útvarů; tomu odpovídá i obsah relevantního učebního textu [1]. V letním semestru (integrální počet funkcí více proměnných, diferenciální rovnice) se však po studentech od počátku žádá přinejmenším geometrická představivost a základní přehled o běžných plochách a křivkách technické praxe, který navíc časově předchází (oproti nedávné minulosti drasticky zredukovaný) výklad této problematiky v závěru kurzu deskriptivní geometrie. Zařazení problematiky pouze do úvodního cvičení letního semestru matematiky (bez přednášky), (skutečně se nejedná o novou teorii s matematickými větami, důkazy apod., nýbrž jen o aplikaci známých poznatků na geometrický popis křivek a ploch), provázené absencí adekvátních podkladů pro samostatné studium, přispívá k velmi nízké úspěšnosti studentů u zkoušky z matematiky v letním semestru.

Tento doplňkový text se snaží nabídnout studentům, kteří sami cítí mezery a špatnou orientaci v analytické geometrii nelineárních útvarů, odkazující mnohdy i na (ne)znalosti středoškolské matematiky, příležitost k doplnění toho nejpotřebnějšího – nejen účelově pro úspěšné absolvování zkoušek v prvním ročníku, ale i pro tvůrčí práci v širokém spektru technických oborů od navrhování pozemních staveb po počítačovou grafiku. Masívní využívání hardwarových i softwarových podpůrných prostředků totiž osvobozuje technicky vzdělaného člověka od upracovaného rýsování a používání historických grafických přístupů, ale o to větší nároky klade na porozumění základním principům a schopnosti abstrakce – jinak degeneruje v jakési uživatelské ovládání „černých skříněk“, kvaziperiodicky se měnících s instalací nových programů. . . .

Celý text je napsán tak, aby nevyžadoval hlubší předběžné znalosti z diferenciálního a integrálního počtu. K jeho studiu je ovšem nezbytné seznámit se s analytickou geometrií lineárních útvarů, založené na operacích s vektory v trojrozměrném euklidovském prostoru. V tomto směru tento text doplňuje a rozšiřuje elektronický studijní materiál [1], jehož plné pochopení není možné bez zvládnutí běžných metod lineární algebry, vyložených ve skriptech [2], a aspoň základních poznatků o lineárních prostorech a operátorech, jimiž se na elementární úrovni dosti obsírně zabývá elektronický studijní materiál [6]. Při popisu křivky se nedá vyhnout pojmu spojitosti funkce jedné proměnné, při popisu plochy spojitosti



funkce dvou proměnných – v obou případech se omezíme na reálné funkce reálné proměnné; u rozvinutelných ploch se navíc neobejdeme ani bez jednoduchého použití pojmu derivace funkce jedné proměnné. Podrobnější vysvětlení těchto pojmů lze nalézt ve skriptech [4] a [5], jejichž důkladné studium však není pro porozumění následujícímu výkladu nezbytné.

Doba potřebná ke studiu je velmi individuální: konkrétně část věnovaná kvadratickým křivkám v rovině bude mnohému čtenáři důvěrně známa ze střední školy, jiný v ní najde i řadu nových informací. Ideální student (vyskytující se snad nejen v představách pedagogických teoretiků), který se nemusí opakovaně vracet k dalším zdrojům, zejména k výkladům [1], by si mohl obsah tohoto textu osvojit za dva až tři pracovní dny. Ke zkrácení doby studia snad přispěje i množství názorných obrázků, připravených v grafickém formátu *jpg* s využitím softwaru MATLAB; záměrně se nepracuje se s geometrickou konstrukcí průnikových křivek, s viditelností hran, s technickým osvětlením apod. – to vše je ponecháno kurzu deskriptivní geometrie.

V celém textu budeme pracovat s jednoduchými symboly pro prostory reálných vektorů a matic, zavedenými v [6]: \mathcal{R}^n budeme rozumět prostor n -rozměrných reálných vektorů (většinou nebude důležité, představujeme-li si je jako řádkové nebo sloupcové) $\mathcal{R}^{m \times n}$ prostor reálných matic o m řádcích a n sloupcích; m a n mohou být libovolná přirozená čísla. Zjednodušeně $\mathcal{R} = \mathcal{R}^1$ bude množina všech reálných čísel a \mathcal{R}_+ množina všech kladných čísel z \mathcal{R} . V \mathcal{R}^n lze zavést kartézskou soustavu souřadnic x_1, x_2, \dots, x_n ; poněvadž budeme většinou pracovat s $n = 2$ nebo $n = 3$, budeme pro jednoduchost označovat $x_1 = x$ a $x_2 = y$ (pro $n = 2$ i $n = 3$), případně i $x_3 = z$ (pro $n = 3$). Takové označení je běžné i v deskriptivní geometrii, kde se rovina souřadnicových os (x, y) nazývá půdorysna, rovina souřadnicových os (x, z) nárysna a rovina souřadnicových os (y, z) bokorysna; bude-li to názorné a užitečné, budeme i my těchto termínů využívat.

V dalším výkladu se přesto dostaneme do jistých názvoslovných problémů: čeští buditelé a jazykovědci při vytváření spisovné terminologie poněkud pozapomněli na rozlišení jednoslovných pojmů jako koule – těleso a plocha koule, resp. kulová plocha (srov. anglické „ball“ a „sphere“), nemluvě již o elipsoidu (obdobně jako koule uzavřeném) nebo o válci či kuželu (kde příslušné těleso kromě naší zájmové plochy musí ohraničit ještě nějaká rovina) v \mathcal{R}^3 ; obdobně to platí mj. o elipse v \mathcal{R}^2 , jasné je jen rozlišení kružnice (křivky) a kruhu (množiny bodů na kružnici a uvnitř kružnice) v \mathcal{R}^3 . V následujícím textu budeme pro jednoduchost vyjadřování (nebude-li výslovně uvedeno jinak) vždy pracovat s příslušnými plochami v \mathcal{R}^3 , resp. s křivkami v \mathcal{R}^2 ; víme-li, že obecná rovnice rotačního elipsoidu (plochy) v \mathcal{R}^3 je např. $x^2 + y^2 + 4z^3 = 1$, snadno odvodíme, že tato plocha omezuje těleso popsateľné nerovnicí $x^2 + y^2 + 4z^3 \leq 1$.

Klíčová slova: analytická geometrie, přímka, rovina, křivka a plocha, rovinná a prostorová křivka, kvadratická křivka, kvadratická plocha, přímková plocha, ro-



tační plocha, rozvinutelná plocha.

2 Přímký a křivky, roviny a plochy

Ze analytické geometrie v \mathcal{R}^2 (tedy v rovině), známé ze středoškolského studia, a v \mathcal{R}^3 (tedy v klasickém euklidovském prostoru), již se věnuje [1], víme, že v \mathcal{R}^2 existují (kromě jednotlivých bodů a celého prostoru \mathcal{R}^2) jednoparametrické lineární útvary zvané přímky, zatímco v \mathcal{R}^3 existují (kromě jednotlivých bodů a celého prostoru \mathcal{R}^3) jednoparametrické lineární útvary zvané přímky a dvouparametrické lineární útvary zvané roviny; speciálně \mathcal{R}^2 lze interpretovat jako rovinu $z = 0$ v \mathcal{R}^3 (tj. vlastně půdorysu). Přímka p v \mathcal{R}^2 , která prochází bodem $[x_0, y_0]$ a má (nenulový) směrový vektor (u_1, u_2) (předpokládáme-li $x_0, y_0, u_1, u_2 \in R$), má dvě parametrické rovnice

$$x = x_0 + tu_1, \quad y = y_0 + tu_2 \quad (1)$$

pro parametr $t \in R$; po vyloučení parametru t vychází

$$u_2x - u_1y = u_1y_0 - u_2x_0$$

neboli pro označení $a = u_2$, $b = -u_1$ a $d = u_1y_0 - u_2x_0$

$$ax + by + d = 0,$$

což je obecná rovnice přímky p v \mathcal{R}^2 . Všimněme si, že (a, b) je vektor kolmý k přímce p a že $a, b, d \in \mathcal{R}$ lze bez újmy na obecnosti násobit libovolným nenulovým reálným číslem: stačilo by tedy formulovat zvlášť obecnou rovnici $ax + by = 1$ pro přímku p neprocházející počátkem souřadnic a $ax + by = 0$ pro přímku p procházející počátkem souřadnic.

Uvažujme nyní nějakou dvojici funkcí φ a ψ spojitých na \mathcal{R} nebo aspoň na nějakém společném definičním oboru (pro obě funkce), jenž náleží \mathcal{R} . Položíme-li $\varphi(t) = x_0 + tu_1$ a $\psi(t) = y_0 + tu_2$, dostaneme pro $t \in R$ dvě parametrické rovnice přímky p , pro t z nějakého intervalu patřícího \mathcal{R} dvě parametrické rovnice úsečky na přímce p ve tvaru

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \quad (2)$$

Připustíme-li, že aspoň jedna z funkcí φ a ψ je nelineární, jsou (2) obecně rovnicemi jisté křivky κ v \mathcal{R}^2 , případně její části.

Velmi speciálně pro $\varphi(t) = x_0 + r \cos t$ a $\psi(t) = y_0 + r \sin t$, tj. pro parametrické rovnice

$$x = x_0 + r \cos t, \quad y = y_0 + r \sin t, \quad (3)$$

kde $r \in \mathcal{R}_+$ a $0 \leq t < 2\pi$, obdržíme kružnici o středu $[x_0, y_0]$ a poloměru r , přičemž parametr t má význam úhlu sevřeného osou x a spojnicí bodu na křivce κ



s počátkem souřadnic, orientovaného v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček). Převedeme-li x_0 a y_0 na levé strany rovnic (2), vidíme ihned (známe-li trigonometrický vzorec $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$), že obecná rovnice naší kružnice κ je

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2;$$

pro další hodnoty parametru t bychom už opakovaně obíhali stejnou kružnici. Z příkladu vidíme i to, že požadavky na funkce φ a ψ jsou dosti slabé, neboť rovnice (2) zahrnuje i různé degenerované případy: připustíme-li např. $r = 0$, degeneruje kružnice κ v jediný bod – svůj střed; připustíme-li dokonce $r < 0$, žádná odpovídající reálná křivka (hypotetická kružnice se záporným poloměrem) vůbec neexistuje. Hlubší studium takových (i výrazně komplikovanějších, ale principiálně srovnatelných) případů nejen pro rovinné křivky, ale i pro prostorové křivky a plochy, je sice v analytické i deskriptivní geometrii užitečné, ale v zájmu jednoduchosti výkladu (který se snaží minimalizovat využití diferenciálního počtu) se jím zde nebudeme zabývat. Na rozdíl od lineárních rovnic (1) i na rozdíl od našeho příkladu s kružnicí může být také obtížné nebo nemožné vyloučit z nelineárních rovnic (2) parametr t .

Typickým příkladem, získatelným jen mírnou modifikací našich parametrických rovnic kružnice, je tzv. logaritmická spirála, zadaná pro $r \in \mathcal{R}$ parametrickými rovnicemi

$$x = x_0 + e^{rt} \cos t, \quad y = y_0 + e^{rt} \sin t;$$

její průběh pro $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $0 \leq t \leq \pi/8$ a různé volby r je zřejmý z obr. 1: červená čára odpovídá $r = 1$, zelená $r = -1$ a modrá $r = 0$, v posledním případě však spirála degeneruje v kružnici o jednotkovém poloměru, z níž vykreslujeme jen šestnáctinu.

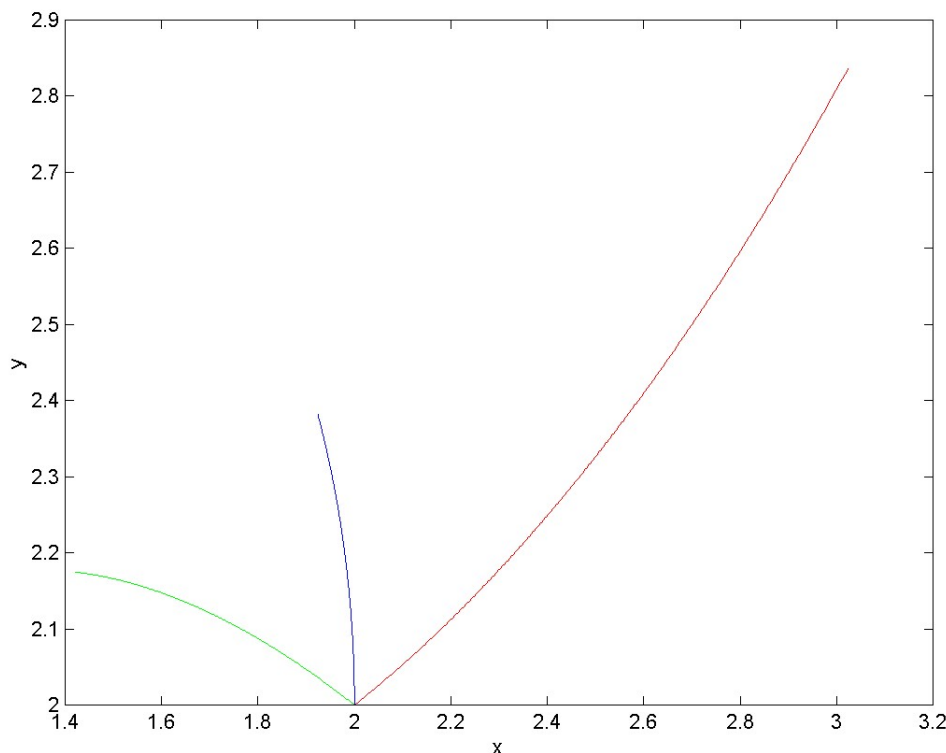
Na rozdíl od \mathcal{R}^2 neexistuje v \mathcal{R}^3 žádná obecná rovnice přímky a obdobně ani křivky – nanejvýš lze přímku určit jako průsečnici dvou rovin a křivku jako průsečnici dvou ploch. Přímka p v \mathcal{R}^3 , která prochází bodem $[x_0, y_0, z_0]$ a má směrový vektor (u_1, u_2, u_3) (předpokládáme-li $x_0, y_0, z_0, u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{R}$) má tři parametrické rovnice

$$x = x_0 + tu_1, \quad y = y_0 + tu_2, \quad z = z_0 + tu_3, \quad (4)$$

pro parametr $t \in \mathcal{R}$. Uvažujme nějakou trojici funkcí φ , ψ a χ spojitých na \mathcal{R} nebo aspoň na nějakém společném definičním oboru (pro všechny tři funkce), jenž náleží \mathcal{R} . Položíme-li $\varphi(t) = x_0 + tu_1$, $\psi(t) = y_0 + tu_2$ a $\chi(t) = z_0 + tu_3$, dostaneme pro $t \in \mathcal{R}$ tři parametrické rovnice přímky p , pro t z nějakého intervalu patřícího \mathcal{R} tři parametrické rovnice úsečky na přímce p ve tvaru

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \quad (5)$$

Připustíme-li, že aspoň jedna z funkcí φ , ψ a χ je nelineární, jsou (5) obecně rovnicemi jisté křivky κ v \mathcal{R}^3 , případně její části.

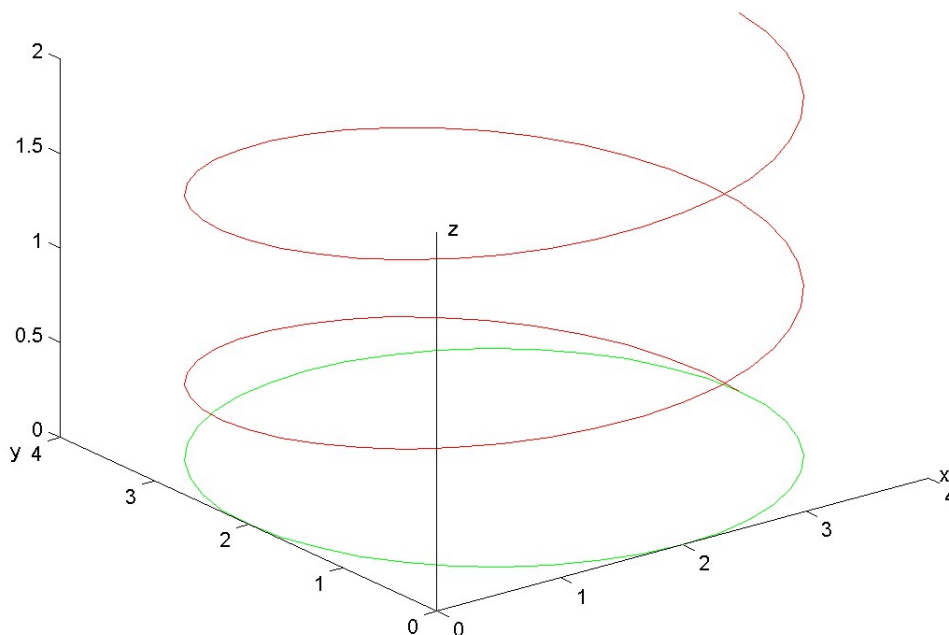


Obr. 1: Části logaritmických spirál

Doplňme nyní dvě parametrické rovnice kružnice z (3) pro zadanou konstantu $h \in \mathcal{R}_+$ formálně rovnicí $z = ht/(2\pi)$. Souřadnice z tedy roste lineárně s parametrem t , probíháme-li celou kružnici z (3), kterou nyní označíme κ_0 , tj. pohybujeme-li se po rotačním válci s řídicí kružnicí κ_0 . Výsledná křivka κ má pro $\varphi(t) = x_0 + r \cos t$, $\psi(t) = y_0 + r \sin t$ a $\chi(t) = ht/(2\pi)$ parametrické rovnice

$$x = x_0 + r \cos t, \quad y = y_0 + r \sin t, \quad z = ht/(2\pi) \quad (6)$$

a nazývá se šroubovice o poloměru r a výšce závitů h ; případná změna x_0 nebo y_0 způsobí pouze posunutí celé šroubovice ve směru osy x nebo y . Celou šroubovici bychom mohli též posunout ve směru osy z : pro jistou reálnou konstantu z_0 by stačilo nahradit třetí rovnicí (6) rovnicí $z = z_0 + ht/(2\pi)$. Všimněme si také, že parametr t může nabývat jakékoliv reálné hodnoty, aniž bychom se vrátili do výchozího bodu – na rozdíl od uzavřené křivky (kružnice) κ_0 je šroubovice κ křivkou otevřenou. Na obr. 2 je červeně vyznačena šroubovice κ a zeleně řídicí kružnice κ_0 pro $0 \leq t \leq 4\pi$ (tedy pro 2 závitů nad sebou); uvažuje se $h = 1$ a $x_0 = y_0 = r = 2$.



Obr. 2: Šroubovice

Rovina τ v \mathcal{R}^3 , která prochází bodem $[x_0, y_0, z_0]$ a má dva nekolineární (a nenulové) směrové vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ (předpokládáme-li $x_0, y_0, z_0, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{R}$), má tři parametrické rovnice

$$x = x_0 + tu_1 + sv_1, \quad y = y_0 + tu_2 + sv_2, \quad z = z_0 + tu_3 + sv_3 \quad (7)$$

pro parametry $t, s \in \mathcal{R}$; parametry t a s by odtud bylo sice možno vyloučit např. Gaussovou eliminací, ale pohodlnější je v tomto případě najít v \mathcal{R}^3 normálový vektor $\vec{n} = (a, b, c)$ pomocí vektorového součinu $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, čímž dostáváme obecnou rovnici roviny τ

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

čili pro označení $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Všimněme si opět (jako u obecné rovnice přímky v \mathcal{R}^2), že $a, b, c, d \in \mathcal{R}$ lze bez újmy na obecnosti násobit libovolným nenulovým reálným číslem: stačilo by tedy

formulovat zvlášť obecnou rovnici $ax + by + cz = 1$ pro rovinu τ neprocházející počátkem souřadnic a $ax + by + cz = 0$ pro rovinu τ procházející počátkem souřadnic.

Uvažujme nyní nějakou trojici funkcí φ , ψ a χ spojitých na \mathcal{R}^2 (na rozdíl od rovnice prostorové křivky jde zde o funkce dvou proměnných) nebo aspoň na nějakém společném definičním oboru (pro všechny tři funkce), jenž náleží \mathcal{R}^2 . Položíme-li $\varphi(t) = x_0 + tu_1 + sv_1$, $\psi(t) = y_0 + tu_2 + sv_2$ a $\chi(t) = z_0 + tu_3 + sv_3$, dostaneme pro $t, s \in R$ tři parametrické rovnice roviny κ , pro t, s z nějaké podmnožiny patřící \mathcal{R} tři parametrické rovnice nějaké části roviny κ ve tvaru

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \quad (8)$$

Připustíme-li, že aspoň jedna z funkcí φ , ψ a χ je nelineární, jsou (8) obecně rovnicemi jisté plochy σ v \mathcal{R}^3 , případně její části.

Pro řadu technicky významných ploch lze (obdobně jako pro rovinné křivky) sestavit nejen parametrické rovnice, ale i obecnou rovnici plochy. Příslušnými postupy se budeme zabývat později; v této kapitole se omezíme na jediný, zato však prakticky mimořádně důležitý příklad 2.1 tzv. šroubového konoidu, tj. plochy složené z přímek, které jsou rovnoběžné s osou z a protínají šroubovici, jejíž řídicí kružnice leží v půdorysně.

Příklad 2.1: Sestavte parametrické a obecné rovnice šroubového konoidu σ , je-li zadán poloměr řídicí kružnice r společně s výškou závitů h .

Řešení: Pro libovolné $t \in R$ zvolme v (6) $x_0 = y_0 = 0$. Současně přepíšme rovnici osy z rovněž ve speciálním tvaru (5)

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = ht/(2\pi),$$

jehož předností je, že pro stejnou hodnotu t se na ose z i šroubovici dostaneme do stejné výšky. Hledané parametrické rovnice (8) plochy σ získáme jako parametrické rovnice tvořících přímek plochy σ , konstruovaných jako spojnice odpovídajících si bodů na ose z a na šroubovici, tj.

$$x = rs \cos t, \quad y = rs \sin t, \quad z = ht/(2\pi). \quad (9)$$

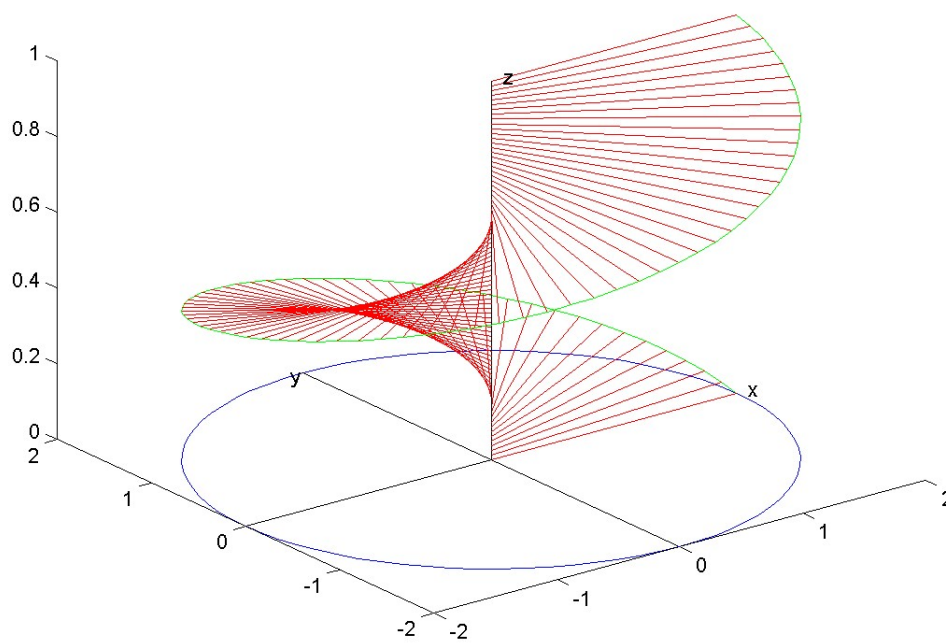
Formálním vzájemným vydělením levých a pravých stran prvních dvou rovnic dostaneme $\operatorname{tg} t = y/x$, z čehož dosazením do třetí rovnice vychází obecná rovnice κ ve tvaru

$$z = (h/2\pi) \operatorname{arctg}(y/x).$$

Se znalostí diferenciálního počtu funkcí více proměnných bychom se mohli přesvědčit i o korektnosti této rovnice v limitním případě $x \rightarrow 0$. Na obr. 3 jsou červeně vyznačeny části tvořících přímek neomezené plochy σ pro $0 \leq s \leq 1$ a $0 \leq t \leq 2\pi$, zeleně je znázorněn jeden závit šroubovice, modře je pak znázorněna odpovídající řídicí kružnice. Fotografie schodiště z nabídkového katalogu



je snad výmluvnější než dlouhý slovní výklad o aplikacích šroubového konoidu v navrhování pozemních staveb.



Obr. 3: Šroubový konoid

3 Posouvání a otáčení souřadnic v rovině a v prostoru

Pro studium geometrických útvarů v \mathcal{R}^2 i \mathcal{R}^3 bývá užitečné pracovat s transformací souřadnic. Na rozdíl od diferenciálního a zejména integrálního počtu, kde bývá nezbytné zacházet s podstatně obecnějšími transformacemi, se zde omezíme jen na speciální transformaci, jíž lze v \mathcal{R}^2 od soustavy kartézských souřadnic (x, y) přejít k jiné soustavě souřadnic (\bar{x}, \bar{y}) pomocí lineární maticové rovnice



$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + M_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (10)$$

pro nějakou regulární matici $M_2 \in \mathcal{R}^{2 \times 2}$, přičemž bod $[x_0, y_0]$ (pro $x_0, y_0 \in \mathcal{R}$) v soustavě souřadnic (x, y) odpovídá bodu $[0, 0]$ v soustavě souřadnic (\bar{x}, \bar{y}) , resp. na speciální transformaci, jíž lze v \mathcal{R}^3 od soustavy kartézských souřadnic (x, y, z) přejít k jiné soustavě souřadnic $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ pomocí lineární maticové rovnice

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + M_3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (11)$$

pro nějakou regulární matici $M_3 \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$, přičemž bod $[x_0, y_0, z_0]$ (pro $x_0, y_0, z_0 \in \mathcal{R}$) v soustavě souřadnic (x, y, z) odpovídá bodu $[0, 0, 0]$ v soustavě souřadnic $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Regularita matic M_2 a M_3 přitom zaručuje, že existuje i inverzní transformace, kterou lze naopak přecházet v \mathcal{R}^2 od soustavy souřadnic (\bar{x}, \bar{y}) k soustavě souřadnic (x, y) a obdobně v \mathcal{R}^3 od soustavy souřadnic $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ k soustavě souřadnic (x, y, z) . Takové zobrazení se nazývá afinita (nebo též dvouslovně afinní zobrazení) a jeho geometrických vlastností, kterými se zde nebudeme detailněji zabývat, se často se využívá v deskriptivní geometrii, např. při hledání skutečných velikostí různých rovinných útvarů zobrazených v paralelním promítání, tj. v promítání se středem v nekonečnu. Pro promítání se středem v konečném bodu (tedy např. při perspektivním zobrazování objektů, resp. při vyhodnocování fotografických snímků, což je předmětem zkoumání fotogrammetrie) bychom s pouhou afinitou nevystačili – obecnější zobrazení zvané kolineace však již není lineární, tj. nelze je zapsat ve tvaru (10) nebo (11) s konstantní (na souřadnicích nezávislou) maticí M_2 či M_3 .

Afinita obecně nezachovává vzdálenosti, obsahy rovinných ani prostorových oblastí. Pokud však pouze souřadnicovými osami pouze posouváme nebo otáčíme, vzdálenosti, obsahy rovinných i prostorových oblastí zůstávají nezměněny. Ukážeme si to nejprve na jednodušším případě \mathcal{R}^2 . Položíme-li v (10)

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dostaneme pouze posunutí souřadnicové soustavy, obecně ve směru obou os x a y . Položíme-li v (10)

$$M_2 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix},$$

obdržíme pouze otočení souřadnicové soustavy o úhel θ , měřený v kladném smyslu a vztažený ke kladnému směru osy x . Snadno vypočteme

$$M_2^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}.$$

Z příkladu 3.1 bude zřejmé, jak se uplatní posunutí, ze příkladu 3.2, jak se uplatní otočení. Příklad 3.3 poskytne návod ke skládání posunutí a otočení.

Příklad 3.1: Vyšetřete rovinnou křivku κ zadanou obecnou rovnicí

$$x^2 + 2x + y^2 = 0.$$



Řešení: Zadanou rovnici snadno upravíme na tvar

$$(x + 1)^2 + y^2 = 1.$$



Zvolíme-li pro posunutí v (10) $x_0 = 1$ a $y_0 = 0$, dostaneme $\bar{x} = x + 1$, y se nezmění. Máme tedy

$$\bar{x}^2 + y^2 = 1,$$

což je rovnice kružnice κ o středu v počátku nové soustavy souřadnic a poloměru 1. Na obr. 4 je tato křivka znázorněna červeně, nová odpovídající souřadnicová soustava je naznačena tečkovaně.

Příklad 3.2: Vyšetřete rovinnou křivku κ zadanou obecnou rovnicí

$$xy = 1.$$



Řešení: Víme, že rovnice kružnice v \mathcal{R}^2 o středu v počátku soustavy souřadnic (\bar{x}, \bar{y}) a poloměru $r \in \mathcal{R}$ je $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = r^2$, zatímco rovnice obdobné rovnosé hyperboly pro vrcholy $[r, 0]$ a $[-r, 0]$ je $\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = r^2$ a pro vrcholy $[0, r]$ a $[0, -r]$ (vzájemnou záměnou x a y) $\bar{y}^2 - \bar{x}^2 = r^2$. Pokusme se uvést zadanou rovnici na nějaký takový tvar otočením původní soustavy souřadnic. K tomu musíme provést otočení o úhel ϑ



$$\bar{x} = x \sin \vartheta + y \cos \vartheta, \quad \bar{y} = -x \cos \vartheta + y \sin \vartheta,$$

takže

$$x = \bar{x} \cos \vartheta - \bar{y} \sin \vartheta, \quad y = \bar{x} \sin \vartheta + \bar{y} \cos \vartheta.$$

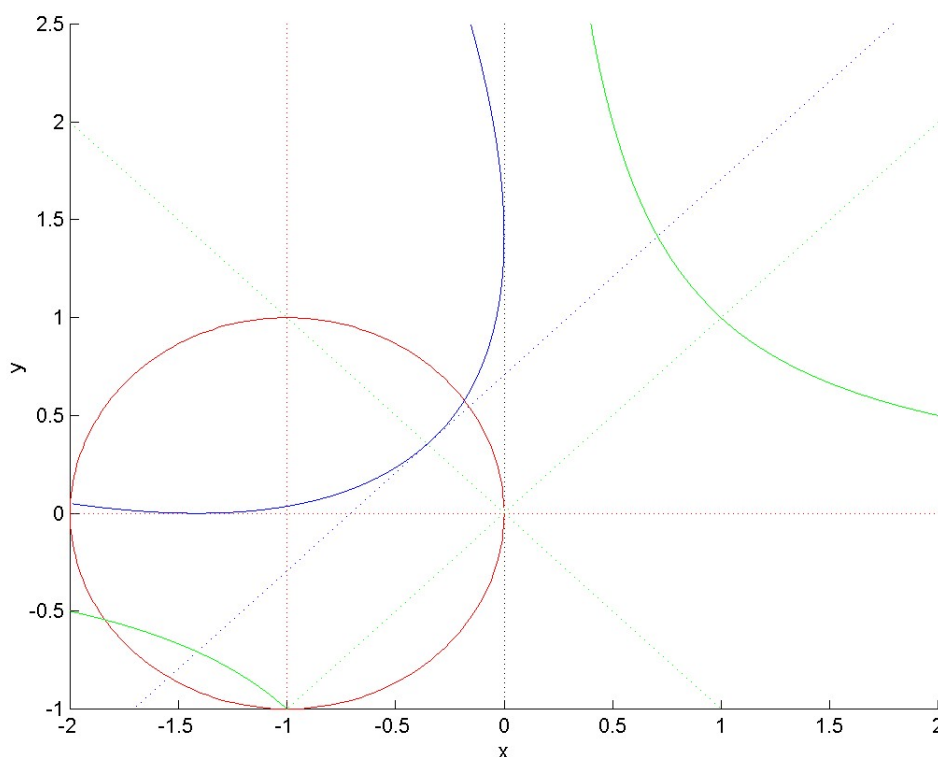
Dosadíme-li za x a y do zadané rovnice, dostaneme

$$(\bar{x} \cos \vartheta - \bar{y} \sin \vartheta)(\bar{x} \sin \vartheta + \bar{y} \cos \vartheta) = 1.$$

Z této rovnice chceme odstranit všechny součiny $\bar{x}\bar{y}$. K tomu však stačí zvolit $\cos^2 \vartheta - \sin \vartheta = 0$ neboli $\cos 2\vartheta = 0$; tato rovnice má řešení $2\vartheta = \pi/2$ čili $\vartheta = \pi/4$, dalšími řešeními se už nemusíme zabývat. Vychází totiž

$$\frac{1}{2}\bar{x}^2 - \frac{1}{2}\bar{y}^2 = 1,$$

což je právě rovnice první ze dvou zmíněných rovnoosých hyperbol pro $r = \sqrt{2}$. Na obr. 4 je tato křivka vyznačena zeleně, nová odpovídající souřadnicová soustava je naznačena tečkovaně. Poznamenejme ještě, že v tomto případě bychom k výsledku mohli dospět přímo ze znalosti grafu funkce $y = 1/x$ (včetně jeho limitního chování pro $x \rightarrow 0$).



Obr. 4: Příklady jednoduchých rovinných křivek v obecné poloze

Příklad 3.3: Vyšetřete rovinnou křivku κ zadanou obecnou rovnicí

$$x^2 + y^2 + 2xy + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 1.$$



Řešení: Pokusíme-li se nejprve zbavit (v nové soustavě souřadnic) součinu xy , dospějeme ke stejnému úhlu otočení jako v předchozím příkladu, z něhož tedy



můžeme zkusit převzít soustavu souřadnic (\bar{x}, \bar{y}) . Dosazením do zadané rovnice obdržíme

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 2 \left(\frac{1}{2} \bar{x}^2 - \frac{1}{2} \bar{y}^2 \right) + (\bar{x} - \bar{y}) - (\bar{x} + \bar{y}) = 1$$

a po úpravě

$$2\bar{x}^2 - 2\bar{y} = 1.$$

Novou soustavu souřadnic můžeme ještě posunout o $\frac{1}{2}$ v kladném směru osy \bar{y} : dostaneme tak pro $\tilde{y} = \bar{y} - \frac{1}{2}$

$$\tilde{y} = \frac{1}{2} \bar{x}^2.$$

Z tohoto tvaru už vidíme, že κ je parabola s parametrem $\frac{1}{4}$. Na obr. 4 je tato křivka vyznačena modře, nová odpovídající souřadnicová soustava je naznačena tečkovaně (druhá z výsledných os přitom splývá se zeleně naznačenou z minulého příkladu).

Poněkud složitější je navrhování vhodného posunutí a otočení v \mathcal{R}^3 . Položíme-li v (11)

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dostaneme pouze posunutí souřadnicové soustavy, obecně ve směru všech tří os x , y a z . Položíme-li v (10)

$$M_3 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_{xy} & \sin \vartheta_{xy} & 0 \\ -\sin \vartheta_{xy} & \cos \vartheta_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obdržíme pouze otočení souřadnicové soustavy o úhel θ_{xy} v půdorysně, tedy v rovině os x a y , měřený v kladném smyslu a vztažený ke kladnému směru osy x . Snadno vypočteme

$$M_3^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_{xy} & -\sin \vartheta_{xy} & 0 \\ \sin \vartheta_{xy} & \cos \vartheta_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Otáčet bychom však obecně mohli (a mnohdy je to nezbytné) i v nárysně, případně v bokorysně; potom je třeba do (11) dosadit

$$M_3 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_{yz} & 0 & \sin \vartheta_{yz} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta_{yz} & 0 & \cos \vartheta_{yz} \end{bmatrix},$$

nebo

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta_{xz} & \sin \vartheta_{xz} \\ 0 & -\sin \vartheta_{xz} & \cos \vartheta_{xz} \end{bmatrix}$$

pro analogické úhly ϑ_{yz} v nárysně a ϑ_{xz} v bokorysně. Jednotlivá otočení lze postupně skládat. Teoreticky je možné pracovat ihned s obecným otočením, zvolíme-li v (10)

$$M_3 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_{xy} & \sin \vartheta_{xy} & 0 \\ -\sin \vartheta_{xy} & \cos \vartheta_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta_{yz} & 0 & \sin \vartheta_{yz} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta_{yz} & 0 & \cos \vartheta_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta_{xz} & \sin \vartheta_{xz} \\ 0 & -\sin \vartheta_{xz} & \cos \vartheta_{xz} \end{bmatrix},$$

prakticky však bývá obtížné navrhnout vhodně hned všechna tři pootočení: pokud bychom se totiž chtěli obdobně jako v příkladu 3.1 zbavit všechny součinnů xy , xz a yz v obecné rovnici nějaké kvadratické plochy, dostali bychom obecně soustavu tří kvadratických rovnic pro neznámé úhly ϑ_{xy} , ϑ_{yz} , ϑ_{xz} . Poněvadž řešení takových úloh není hlavním cílem našeho výkladu, budeme tento postup dokumentovat jen na dvou jednoduchých příkladech 3.4 a 3.5, vzniklých modifikací příkladů 3.1 a 3.2.

Příklad 3.4: Vyšetřete plochu σ zadanou obecnou rovnicí

$$x^2 + 2x + y^2 + z^2 = 0.$$

Řešení: Zadanou rovnici snadno upravíme na tvar

$$(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Zvolíme-li pro posunutí v (11) $x_0 = 1$ a $y_0 = z_0 = 0$, dostaneme $\bar{x} = x + 1$, y ani z se nezmění. Máme tedy

$$\bar{x}^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

což je rovnice kulové plochy σ o středu v počátku nové soustavy souřadnic a poloměru 1. Červenou kružnici na obr. 4 lze interpretovat jako průmět řez této plochy půdorysnou, kruh touto kružnicí ohraničený jako průmět σ do půdorysny.

Příklad 3.5: Vyšetřete plochu σ zadanou obecnou rovnicí

$$xy = z.$$

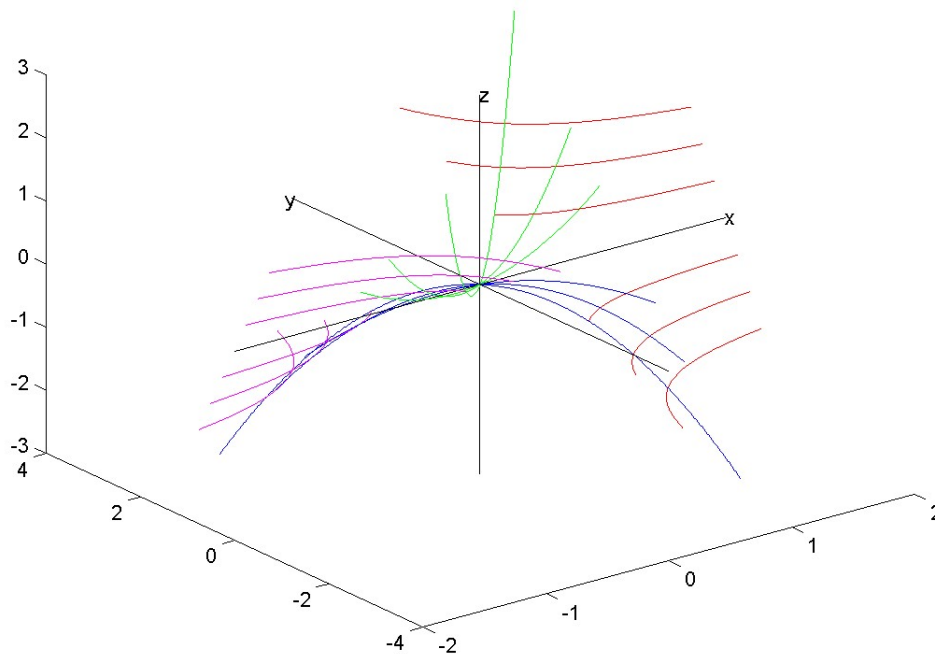
Řešení: Poněvadž v zadané rovnici chybějí součiny xz a yz , vystačíme s otočením v půdorysně, které nemění souřadnici z . Pro souřadnice \bar{x} a \bar{y} z příkladu 2.2 dostaneme

$$(\bar{x} \cos \vartheta_{xy} - \bar{y} \sin \vartheta_{xy})(\bar{x} \sin \vartheta_{xy} + \bar{y} \cos \vartheta_{xy}) = z.$$

Obdobně jako v příkladu 2.2 můžeme potom zvolit $\vartheta_{xy} = \pi/4$, a tak obdržíme

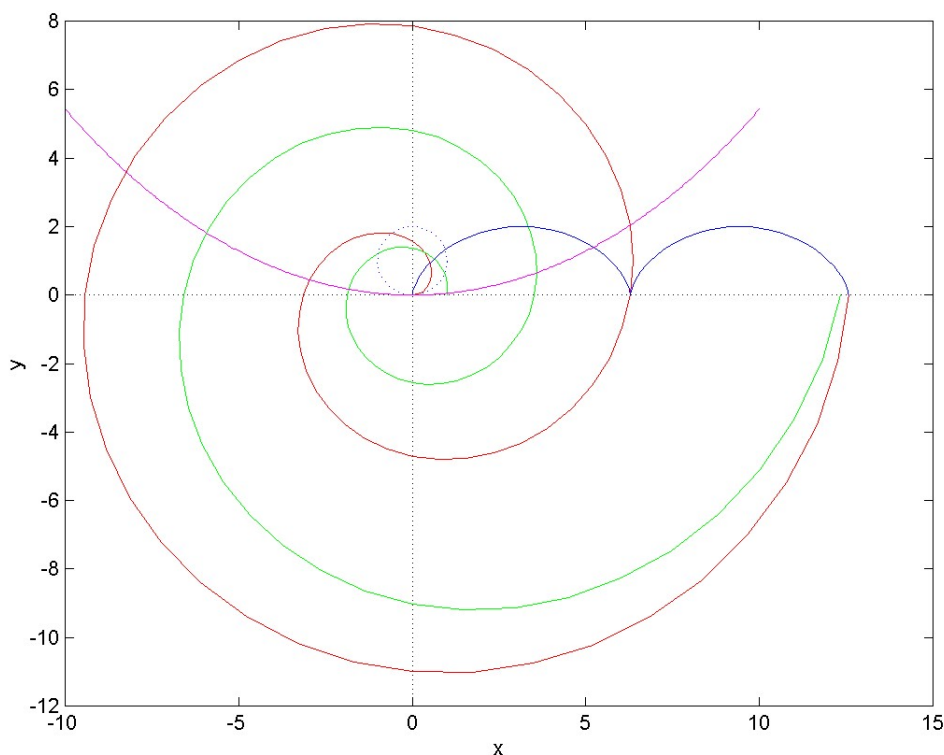
$$z = \frac{1}{2}\bar{x}^2 - \frac{1}{2}\bar{y}^2.$$

Po prostudování celého tohoto textu už nebudeme muset přemýšlet a ihned určíme, že σ je hyperbolický paraboloid; pokud ale ještě k tomu nemáme potřebné znalosti, můžeme si vypomoci vhodnými řezy plochy σ . Řez půdorysnou ($z = 0$) sestává z osy x ($y = z = 0$) a z osy y ($x = z = 0$). Řez nárysnou ($y = 0$) sestává z osy x ($y = z = 0$) a z osy z ($x = y = 0$). Řez bokorysnou ($x = 0$) sestává z osy y ($x = z = 0$) a z osy z ($x = y = 0$). Řez rovinou rovnoběžnou s půdorysnou, která má obecně rovnici $z = h$ pro nějaké $h \in \mathcal{R}$, je hyperbola $xy = h$, což můžeme snadno ověřit postupem známým z příkladu 2.2; soustava takových řezů je na obr. 5 pro $h \in \{1/2, 1, 3/2\}$ znázorněna červeně a pro $h \in \{-1/2, 1, 3/2\}$ fialově. Řez rovinou procházející osou z , která má obecnou rovnici $y = \nu x$ nebo $x = \nu y$ pro nějaké $\nu \in \mathcal{R}$, je obdobně jako v příkladu 2.3 parabola $z = \nu x^2$ nebo $z = \nu y^2$; soustava takových řezů je na obr. 5 pro $\nu = \{1/2, 1, 2\}$ znázorněna zeleně a pro $\nu = \{-1/2, -1, -2\}$ modře (lhostejno, zda pro $y = \nu x$ nebo pro $x = \nu y$). Nedokonalost tohoto náčrtu nechť je nám motivací pro důkladnější studium kvadratických ploch.



Obr. 5: Části hyperbol a parabol na hyperbolickém paraboloidu

4 Rovinné křivky, kvadratické křivky



Obr. 6: Spirály, cykloida a řetězovka

Křivky v \mathcal{R}^2 zkoumali a klasifikovali už badatelé starověku. K nejčastěji odkazovaným patří spirály, což jsou křivky vznikající pohybem bodu po rotujícím průvodiči. Jejich společné parametrické rovnice (vyjdeme-li ze středu v počátku souřadnic, tj. položíme-li $x_0 = y_0 = 0$ v naší rovnici logaritmické spirály v kapitole 2) je

$$x = \rho(t) \cos t, \quad y = \rho(t) \sin t,$$

kde $\rho(t)$ je nějaká spojitá funkce úhlu t , měřeného v kladném smyslu od kladného směru osy x . Ještě formálně jednodušší než logaritmická spirála s $\rho(t) = e^{rt}$ je Archimedova spirála s $\rho(t) = rt$, v obou případech pro zadanou konstantu r . Jiným příkladem rovinné křivky je cykloida, jejíž parametrické rovnice obdobně jsou

$$x = r(t - \sin(t)), \quad y = r(1 - \cos t);$$

tuto křivku si lze nejlépe představit jako dráhu opisovanou bodem na kružnici $x^2 + (y - r)^2 = r^2$ kutálené po ose x . Vyloučit t z parametrických rovnic však pro žádnou z těchto křivek nelze – jejich obecné rovnice v \mathcal{R}^2 tak nemáme k dispozici. Aníž bychom se zde podrobněji zabývali geometrickými vlastnostmi či technickým využitím spirál či cykloidy, porovnáme aspoň pro ilustraci na obr. 6 červeně



vyznačenou Archimedovu spirálu s $r = 1$, zeleně vyznačenou logaritmickou spirálu s $r = 1/5$ a modře vyznačenou cykloidu s $r = 1$ pro $0 \leq t \leq 2\pi$; kutálená kružnice je znázorněna tečkovaně v počáteční poloze se sledovaným bodem v počátku souřadnic, pohybuje se zleva doprava.

Na obr. 6 si můžeme všimnout ještě jedné křivky, odlišené od ostatních fialovou barvou. Křivka se nazývá řetězovka a její parametrické rovnice jsou

$$x = \frac{t}{r}, \quad y = r(\cos ht - 1)$$

(víme přitom, že $\cos ht = e^t + e^{-t}$) pro libovolné $t \in \mathcal{R}$; na obr. 6 volíme opět $r = 1$ a omezujeme se na $-1 \leq t \leq 1$ Fyzikálně tvar řetězovky vždy vytvoří těžké dokonale ohebné vlákno, jež je zavěšeno ve dvou bodech; různých zobecnění tohoto extrémně idealizovaného přístupu využívá statika i dynamika stavebních konstrukcí, např. při navrhování lanových střech nebo kotvení štíhlých konstrukcí. Řetězovka je však zajímavá i tím, že její obecná rovnice (na rozdíl od ostatních křivek na obr. 6) je velmi jednoduchá: stačí z první parametrické rovnice vypočítat t a dosadit do druhé s výsledkem

$$y = r \left(\arccos \frac{x}{r} - 1 \right).$$

Na rozdíl od většiny již zmiňovaných křivek bývají obecnou rovnicí obvykle zadány kvadratické křivky; jim bývá (jako tzv. kuželosečkám – k významu tohoto označení se v následující kapitole vrátíme) věnováno dost prostoru i ve středoškolské matematice, takže zde vystačíme s přehledem základních poznatků. Obecná rovnice kvadratické křivky κ v \mathcal{R}^2 je

$$Ax^2 + By^2 + Dxy + ax + by + d = 0; \quad (12)$$

je tedy přirozeným zobecněním rovnice přímky (1), v níž kromě konstant $a, b, d \in \mathcal{R}$ vystupují i další konstanty $A, B, D \in \mathcal{R}$. Prochází-li κ počátkem souřadnic, můžeme opět bez újmy na obecnosti volit $d = 0$, v opačném případě stačí volit $d = -1$. Je-li $A = B = D = 0$, je (12) vždy rovnicí přímky (pomineme-li zcela degenerované případy $a = b = 0$); známe-li souřadnice jejích dvou bodů, snadno (řešením soustavy dvou lineárních algebraických rovnic) určíme neznámé a a b . Pokud je některá z konstant A, B a D nenulová a známe-li souřadnice pěti bodů ležících na κ , můžeme obdobně (řešením soustavy pěti lineárních algebraických rovnic) určit všechny neznámé A, B, D, a a b . Deskriptivní geometrie dokonce nabízí (nepříliš jednoduchou, leč klasickou) konstrukci, která příslušnou kvadratickou křivku umožňuje sestavit pouze pomocí pravítka a kružítka. Obecně však ani algebraické stanovení, o jakou křivku se jedná, není triviální.

V první řadě je zapotřebí provést posunutí a otočení soustavy souřadnic tak, aby obecná rovnice (12) křivky κ přešla v nových souřadnicích měla vždy

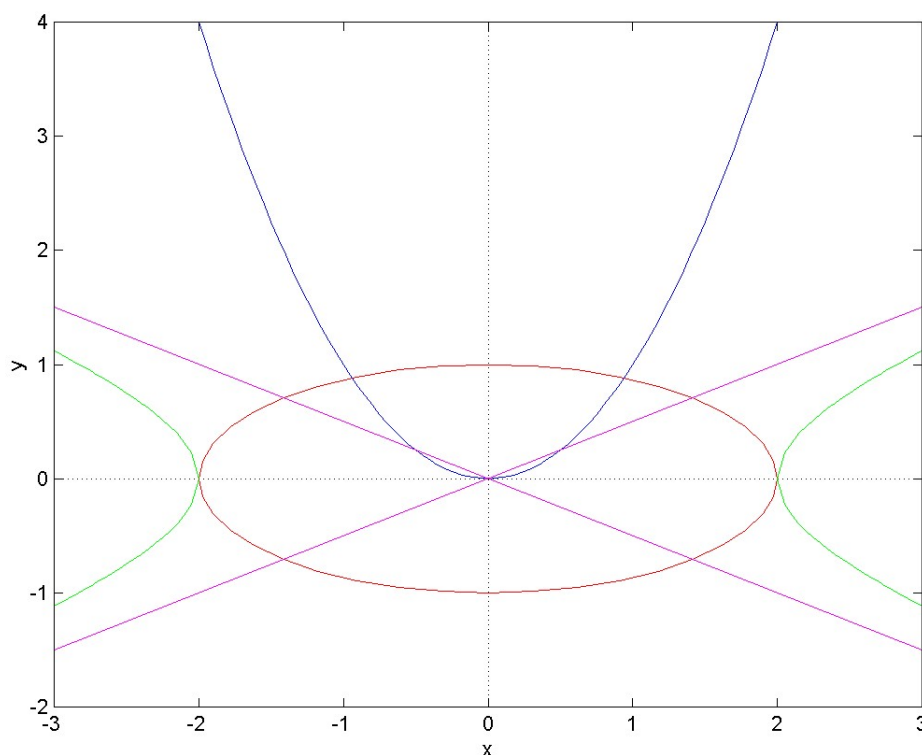
$D = 0$ a pokud možno také $a = b = 0$; lze tolerovat jedině $a = -1$ pro $A = d = 0$, případně $b = -1$ pro $B = d = 0$. Jak se takové transformace provádějí, jsme demonstrovali na řadě příkladů v předcházející kapitole. Pro jednoduchost budeme nové souřadnice označovat opět x a y . Rovnice (12) v nich může nabýt jednoho ze tří základním tvarů:

$$Ax^2 + By^2 = 1, \quad (13)$$

$$Ax^2 = 2y, \quad (14)$$

$$Ax^2 + By^2 = 0, \quad (15)$$

přitom A ani B v (13), (14), nebo (15) nesmí být rovno nule.



Obr. 6: Kvadratické křivky: elipsa, hyperbola, parabola a dvojice přímek

Je-li κ popsána rovnicí (13), lze rozlišit tyto případy: Je-li $A > 0$ i $B > 0$, je κ elipsa o středu $[0, 0]$ a délkách poloos $\alpha = 1/\sqrt{A}$ a $\beta = 1/\sqrt{B}$; speciálně pro $A = B$ jde o kružnici a $\alpha = \beta$ je její poloměr. V dalších úvahách budeme často používat i parametrické rovnice této elipsy

$$x = \alpha \cos t, \quad y = \beta \sin t \quad (16)$$

pro $0 \leq t < 2\pi$. Na obr. 6 je červeně znázorněna taková elipsa s $A = 1/4$ a $B = 1$, a tedy s $\alpha = 2$ a $\beta = 1$. Je-li naopak $A < 0$ nebo $B < 0$ (současně $A < 0$ a $B < 0$

být splněno nemůže), je κ hyperbola o středu $[0, 0]$ a délkách poloos $\alpha = 1/\sqrt{A}$ a $\beta = 1/\sqrt{B}$, přičemž reálná (odpovídající obdobně jako u elipsy skutečným vrcholům) je v případě $A > 0$ jen poloosa ležící v ose x , v případě $B > 0$ pak jen poloosa ležící v ose y . Na obr. 6 je zeleně znázorněna taková hyperbola s $A = 1/4$ a $B = -1$, a tedy opět s $\alpha = 2$ a $\beta = 1$.

Je-li κ popsána rovnicí (14), je κ vždy parabola o vrcholu $[0, 0]$ (hypotetický střed paraboly je vždy v nekonečnu) s osou v ose y ; parametrem paraboly je číslo $\lambda = 1/A$. V případě $A > 0$ se parabola rozevírá v kladném směru osy y , v případě $A < 0$ v záporném směru osy y . Na obr. 6 je modře znázorněna taková parabola s $A = 2$, a tedy s $\lambda = 1/2$ (čili se zvláště jednoduchou obecnou rovnicí $y = x^2$). Pokud bychom připustili i $A = 0$, popisovala by příslušná rovnice $y = 0$ namísto paraboly jen osu x .

Na první pohled by se mohlo zdát, že za (14) chybí ještě další tvar rovnice (12)

$$By^2 = 2x, \quad (17)$$

který by generoval paraboly s osami v ose x . Ukážeme si nyní, proč jeho zařazení není nezbytné; obdobných obrátů musíme pak umět využívat hlavně při studiu kvadratických ploch v \mathcal{R}^3 , kde se bude nabízet ještě více variantních možností. Přepíšme (17) v nové soustavě souřadnic (\bar{x}, \bar{y}) , kterou získáme pootočením standardní soustavy (x, y) o úhel $\vartheta = -\pi/2$. Pak v (10) máme

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

takže $\bar{x} = -y$ a $\bar{y} = x$. Alternativní tvar (17)

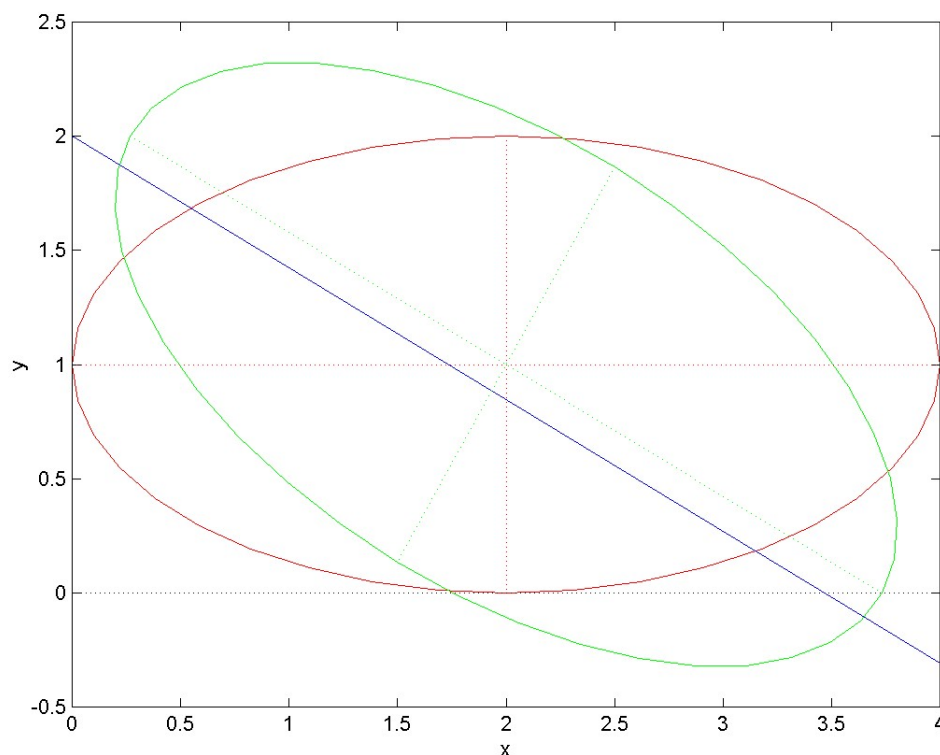
$$B\bar{x}^2 = 2\bar{y}$$

je již formálně shodný s (14), pouze s B namísto s A .

Zbývá vyšetřit, zda něco rozumného vůbec ještě popisuje rovnice (15) – elipsy a hyperboly dostáváme totiž z (14) a paraboly z (15). Mají-li A i B stejné znaménko, určuje (15) jen počátek souřadnic; jedno z čísel A , B musí tedy být kladné a druhé záporné. Zde pro jednoduchost předpokládejme $A > 0$ a $B < 0$ a označme $\nu = \sqrt{-A/B}$ (vždy tak odmocňujeme kladné číslo). Tím (15) získá tvar $x - \nu^2 y = 0$ neboli

$$(\nu x - y)(\nu x + y) = 0,$$

a kvadratická křivka se tak rozpadá na dvě přímky $y = \nu x$ a $y = -\nu x$. Pokud bychom připustili i $A = 0$, obě tyto přímky by dokonce splynuly s osou x . Stejnou úvahu (se záměnou x a y) lze pochopitelně zopakovat i pro $A < 0$ a $B > 0$. Na obr. 6 je fialově znázorněna zmiňovaná dvojice přímek pro $A = 1/4$ a $B = -1$ (to je stejná volba jako u zeleně vyznačené hyperboly), a tedy s $\nu = 1/4$.



Obr. 6: Elipsa v předepsané poloze

V příkladu 4.1 si ověříme znalosti z této a předešlé kapitoly. Kromě klasifikace kvadratických křivek, jejichž obecné rovnice v praxi nebývají přímo ve tvaru (13), (14) nebo (15) budeme pracovat s posouváním a otáčením v \mathcal{R}^2 . Poznamenejme ještě, že kvadratickou křivku bychom mohli charakterizovat i přímo na základě (12), aniž bychom rozuměli jakýmkoliv afinním transformacím, museli bychom však mít k dispozici tabulku poměrně komplikovaných testovacích kritérií s využitím čtvercových matic a jejich determinantů, kterou lze nalézt např. v [3], str.190; v těchto kritériích je nicméně zmíněné posouvání a otáčení implicitně zabudováno, jenže pro zcela obecná A, B, D, a, b a d z (12).

Příklad 4.1: Zjistěte, je-li obecnou rovnicí

$$x^2 + 4y^2 - 4x - 8y = 4$$

určena nějaká elipsa κ v \mathcal{R}^2 . Pokud ano, zjistěte její střed, délku hlavní a vedlejší poloosy, a její parametrické rovnice a sestavte též obecnou rovnici i parametrické rovnice elipsy κ^* , která vznikne takovým pootočením elipsy κ , že elipsa κ^* bude mít hlavní osu rovnoběžnou s přímkou o obecné rovnici

$$x + \sqrt{2}y = 2\sqrt{2}.$$



Řešení: Údajnou obecnou rovnicí elipsy lze přepsat ve tvaru

$$x^2 - 4x + 4 + 4y^2 - 8y + 4 = 12$$

neboli

$$(x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 4.$$

Posunutím soustavy souřadnic

$$\bar{x} = x - 2, \quad \bar{y} = y - 1$$

potom vychází

$$\frac{\bar{x}^2}{4} + \bar{y}^2 = 1,$$

což je speciální případ (13) s $A = 4$ a $B = 1$, tedy s hlavní poloosou ve směru osy x o délce $\alpha = 2$ a vedlejší poloosou ve směru osy y o délce $\beta = 1$. Parametrické rovnice κ lze pro $0 \leq t < 2\pi$ zapsat ve tvaru

$$\bar{x} = 2 \cos t, \quad \bar{y} = \sin t,$$

v původní soustavě souřadnic pak ve tvaru

$$x = 2 + 2 \cos t, \quad y = 1 + \sin t,$$

případně v maticovém zápisu

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} - 2 \\ \tilde{y} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Zadaná přímka (u níž je důležitý jen směr, nikoliv poloha v \mathcal{R}^2) protíná osu x v bodě $[2\sqrt{2}, 0]$ a osu y v bodě $[0, 2]$, svírá tedy s osou x úhel ω , pro nějž platí

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{0 - 2\sqrt{2}}{2 - 0} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

takže $\omega = -\pi/6$ (lze připustit i $\omega = 5\pi/6$, nevedlo by to však k žádnému novému výsledku, jen k jiné orientaci jedné z otáčených os). Přitom (18) můžeme považovat i za rovnici elipsy κ^* , avšak namísto x a y bychom museli dosazovat nové souřadnice ze soustavy otočené o $-\pi/6$. Chceme-li zůstat u původních souřadnic x a y , nezbyvá než provést podle (10) otočení zpět o úhel $\pi/6$; dostáváme tak

$$\begin{bmatrix} x - 2 \\ y - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Elipsa κ^* má tedy parametrické rovnice

$$x = 2 + \sqrt{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t, \quad y = 1 - \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t.$$



Obecnou rovnici κ^* můžeme získat tak, že (19) přepíšeme v inverzním tvaru

$$\begin{bmatrix} 2 \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 2 \\ y - 1 \end{bmatrix}$$

čili (po vynásobení druhé rovnice dvěma)

$$2 \cos t = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 2) - \frac{1}{2}(y - 1), \quad 2 \sin t = x - 2 + \sqrt{2}(y - 1),$$

z něhož již snadno použitím vzorce $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ vychází

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 2) - \frac{1}{2}(y - 1) \right)^2 + \left((x - 2) + \sqrt{2}(y - 1) \right)^2 = 4.$$

Případné další algebraické úpravy již ponecháme laskavému a pečlivému čtenáři.

5 Křivky jako průniky ploch, prostorové křivky

Obdobně jako lze přímku v R^3 popsat jako průnik dvou rovin, lze i křivku popsat jako průnik dvou ploch. Prozatím jsme se podrobněji nezabývali rovnicemi speciálních (např. kvadratických) ploch, takže se nejprve soustředíme na velmi jednoduchý případ: jedna plocha bude rotační kužel a druhá rovina. Kužel σ bude mít řídicí kružnici o poloměru r v půdorysně, její střed bude v počátku souřadnic, vrchol kužele bude ve výšce h nad půdorysnou (předpokládá se $r, h \in \mathcal{R}_+$). Rovina ρ bude svírat s půdorysnou nezáporný úhel ω , který, jsa měřen v kladném smyslu vzhledem ke kladnému směru osy x , nepřesáhne $\pi/2$, a bude obsahovat osu y . V závislosti na úhlu ω bychom měli dostávat jako řez κ plochy σ rovinou τ kvalitativně různé kuželosečky, tj. jisté rovinné křivky, i když obecně v prostoru \mathcal{R}^2 , který jsme ztotožnili s půdorysnou. Vhodným otočením soustavy souřadnic se přesvědčíme, že všechny kuželosečky lze identifikovat jako kvadratické křivky v τ .

Řídicí kružnice v půdorysně má parametrické rovnice

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = 0$$

pro $0 \leq t < 2\pi$. Plocha τ je tvořena povrchovými přímkami, jež procházejí jednotlivými body řídicí kružnice a vrcholem $[0, 0, h]$; její parametrické rovnice tedy jsou

$$x = rs \cos t, \quad y = rs \sin t, \quad z = h(1 - s) \quad (20)$$

pro $0 \leq t < 2\pi$ a $s \in \mathcal{R}$. Rovina τ má (díky své speciální poloze) velmi jednoduchou obecnou rovnici

$$z = x \operatorname{tg} \omega. \quad (21)$$



Dosadíme-li do ní x a z z (20), dostaneme

$$h(1 - s) = rs \operatorname{tg} \omega \cos t;$$

odtud již můžeme explicitně vyjádřit parametr s jen pomocí parametru t ve tvaru

$$s = \left(1 + \frac{r}{h} \operatorname{tg} \omega \cos t\right)^{-1}.$$

Rovnice řezu plochy σ rovinou τ tedy jsou

$$\begin{aligned} x &= \left(1 + \frac{r}{h} \operatorname{tg} \omega \cos t\right)^{-1} r \cos t, \\ y &= \left(1 + \frac{r}{h} \operatorname{tg} \omega \cos t\right)^{-1} r \sin t, \\ z &= \left(1 + \frac{r}{h} \operatorname{tg} \omega \cos t\right)^{-1} r \operatorname{tg} \omega \cos t. \end{aligned}$$

Již naznačeným otočením soustavy souřadnic s využitím (11)

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega & 0 & \sin \omega \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \omega & 0 & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

obdržíme popis průniku σ a τ v nových souřadnicích \bar{x} a \bar{y} ve tvaru

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \left(1 + \frac{r}{h} \operatorname{tg} \omega \cos t\right)^{-1} r (\cos \omega + \sin \omega \operatorname{tg}) \cos t, \\ \bar{y} &= \left(1 + \frac{r}{h} \operatorname{tg} \omega \cos t\right)^{-1} r \sin t, \end{aligned}$$

přičemž třetí rovnice skutečně dává jen $\bar{z} = 0$ (což je kontrola, že otočení bylo vhodné). Všimněme si také, že první z rovnic lze ještě přepsat v poněkud jednodušším tvaru

$$\bar{x} = \left(1 + \frac{r}{h} \operatorname{tg} \omega \cos t\right)^{-1} r \frac{\cos t}{\cos \omega},$$

takže vlastně dostáváme

$$\begin{aligned} \bar{x} \cos \omega \left(1 + \frac{r}{h} \operatorname{tg} \omega \cos t\right) &= r \cos t, \\ \bar{y} \left(1 + \frac{r}{h} \operatorname{tg} \omega \cos t\right) &= r \sin t, \end{aligned} \tag{22}$$

odtud povýšením na druhou a sečtením levých a pravých stran obou rovnic

$$\left(\bar{x}^2 \cos^2 \omega + \bar{y}^2\right) \left(1 + \frac{r}{h} \operatorname{tg} \omega \cos t\right)^2 = r^2$$

čili po odmocnění

$$1 + \frac{r}{h} \operatorname{tg} \omega \cos t = r \sqrt{\bar{x}^2 \cos^2 \omega + \bar{y}^2}$$

(případně na pravé straně s $-r$ namísto r , z dalšího postupu však bude zřejmé, že to nebude mít na výsledek žádný vliv). Dvojice rovnic (22) tak (po vydělení r) získá podstatně jednodušší tvar

$$\cos t = \frac{\bar{x} \cos \omega}{\sqrt{\bar{x}^2 \cos^2 \omega + \bar{y}^2}}, \quad \sin t = \frac{\bar{x} \sin \omega}{\sqrt{\bar{x}^2 \cos^2 \omega + \bar{y}^2}}.$$

Dosazením těchto výrazů pro výpočet $\sin t$ a $\cos t$ do druhé rovnice (22) nyní (po vydělení \bar{y}) vychází

$$1 + \frac{r \bar{x} \sin \omega}{h \sqrt{\bar{x}^2 \cos^2 \omega + \bar{y}^2}} = \frac{r}{\sqrt{\bar{x}^2 \cos^2 \omega + \bar{y}^2}},$$

po vynásobení odmocninou ve jmenovateli pak

$$\sqrt{\bar{x}^2 \cos^2 \omega + \bar{y}^2} + \frac{r \bar{x} \sin \omega}{h} = r$$

a po povýšení na druhou

$$\bar{x}^2 (1 - \sin^2 \omega) + \bar{y}^2 = r^2 \left(1 - \frac{\bar{x} \sin \omega}{h}\right)^2.$$

Po roznásobení výrazu na pravé straně tak dostáváme

$$\eta \bar{x}^2 + \frac{2r^2 \bar{x} \sin \omega}{h} + \bar{y}^2 = r^2, \quad (23)$$

kde jsme v zájmu stručnosti zápisu použili nové označení

$$\eta = 1 - \sin^2 \omega \left(1 + \frac{r^2}{h^2}\right).$$

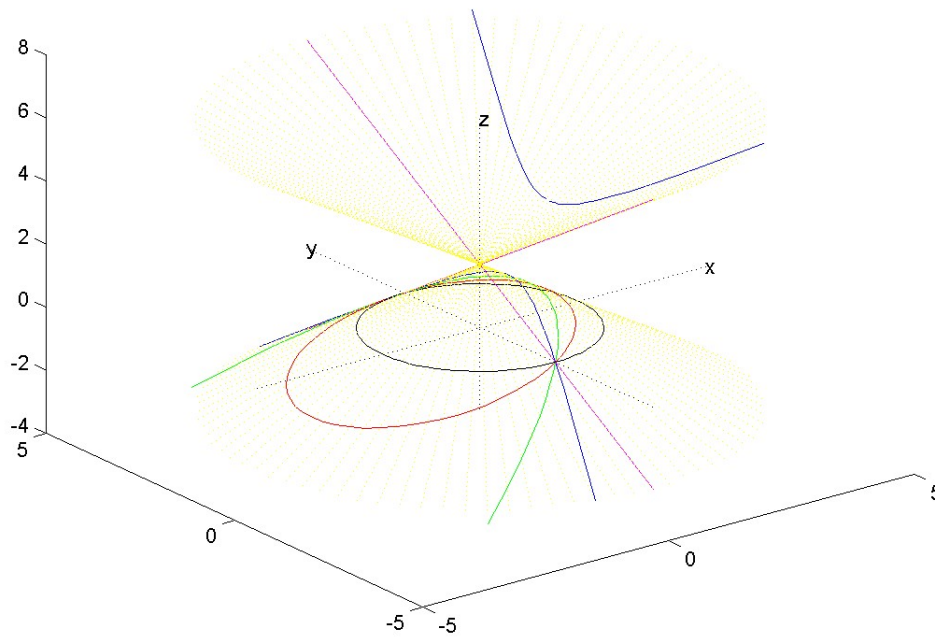
Rovnice (23) je klíčová pro rozhodování o charakteru kuželosečky. Dokázali jsme již, že κ musí být kvadratická křivka v τ . Dále vidíme, že součinitel η může být kladný, nulový i záporný. Je-li roven nule, můžeme (23) přepsat v jednodušším tvaru

$$\bar{y}^2 = -\frac{2r^2 \sin \omega}{h} \left(\bar{x} - \frac{h}{2 \sin \omega}\right),$$

který po pouhém posunutí souřadnicové osy \bar{y}

$$\bar{x}^* = \bar{x} - \frac{h}{2 \sin \omega}, \quad \bar{y}^* = \bar{y}$$

je speciálním případem (14); κ je tedy parabola. Příslušný úhel ω budeme nadále označovat ω_0 . Poněvadž $\sqrt{r^2 + h^2}$ je délka přepony pravoúhlého trojúhelníka, který má odvěsny o délkách r a h , platí také $\operatorname{tg} \omega = h/r$; τ musí tedy svírat s půdorysnou stejný úhel jako tvořící přímky kuželu. Ty jsou na obr. 7, kde je nastaveno $r = 2$ a $h = 2$ (a tedy $\omega_0 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \pi/4$), zvýrazněny žlutě, (poněvadž plocha σ není uzavřená, lze zobrazit jen její část). řídící kružnice kuželu σ je zakreslena černě. Zeleně je vyznačena parabola, která je pro $\omega = \omega_0$ hledanou křivkou κ .



Obr. 7: Kuželosečky – rovinné řezy rotačního válce

Je-li $\eta \neq 0$, můžeme jím vydělit (23) s výsledkem

$$\bar{x}^2 + \frac{2r^2 \bar{x} \sin \omega}{\eta h} + \frac{\bar{y}^2}{\eta} = \frac{r^2}{\eta}. \quad (24)$$

Je-li dokonce $\eta > 0$ (neboli $\omega < \omega_0$), můžeme (24) formálně přepsat jako

$$\left(\bar{x} + \frac{r^2 \sin \omega}{\eta h} \right)^2 + \frac{\bar{y}^2}{\eta} = \frac{r^2}{\eta} \left(1 + \frac{r^2 \sin^2 \omega}{\eta h^2} \right). \quad (25)$$

Posunutí souřadnicové osy \bar{y}

$$\bar{x}^* = \bar{x} + \frac{r^2 \sin \omega}{\eta h}, \quad \bar{y}^* = \bar{y}$$

převádí (24) po vydělení pravou stranou (ta je vždy kladná) do speciálního tvaru (13) s $A > 0$ i $B > 0$; κ je tedy elipsa. Na obr. 7 je vyznačena červeně taková elipsa pro $\omega = \pi/8$.

Je-li $\eta < 0$ (neboli $\omega > \omega_0$), je vhodné celou rovnici (24) ještě vynásobit -1 a zavést označení $\bar{\eta} = -\eta > 0$, čímž dostaneme

$$-\bar{x}^2 + \frac{2r^2 \bar{x} \sin \omega}{\bar{\eta} h} + \frac{\bar{y}^2}{\bar{\eta}} = \frac{r^2}{\bar{\eta}},$$

a tento výsledek pak můžeme formálně přepsat jako

$$-\left(\bar{x} - \frac{r^2 \sin \omega}{\bar{\eta} h}\right)^2 + \frac{\bar{y}^2}{\bar{\eta}} = \frac{r^2}{\bar{\eta}} \left(1 - \frac{r^2 \sin^2 \omega}{\bar{\eta} h^2}\right). \quad (26)$$

Posunutí souřadnicové osy \bar{y}

$$\bar{x}^\times = \bar{x} - \frac{r^2 \sin \omega}{\eta h}, \quad \bar{y}^\times = \bar{y}$$

převádí (26) po vydělení pravou stranou (ta může být kladná i záporná, musíme pouze předpokládat, že není rovna nule, tedy $\omega \neq \pi/2$) do speciálního tvaru (15), přičemž jedno z čísel A, B je vždy kladné a druhé záporné; κ je tedy hyperbola. Na obr. 7 je vyznačena modře taková hyperbola pro $\omega = 3\pi/8$.

Zbývá podrobněji vyšetřit případ $\omega = \pi/2$. Je-li však rovina τ rovnoběžná s nárysnou, obsahuje i vrchol kuželu σ , takže κ sestává pouze ze dvou přímk; tento závěr pochopitelně vychází rovněž použitím (15). Na obr. 7 je tato dvojice přímk vyznačena fialově. Druhý mezní případ $\omega = 0$ nemusíme zvlášť studovat – elipsa κ zde evidentně splývá se zadanou řídicí kružnicí kuželu v půdorysně.

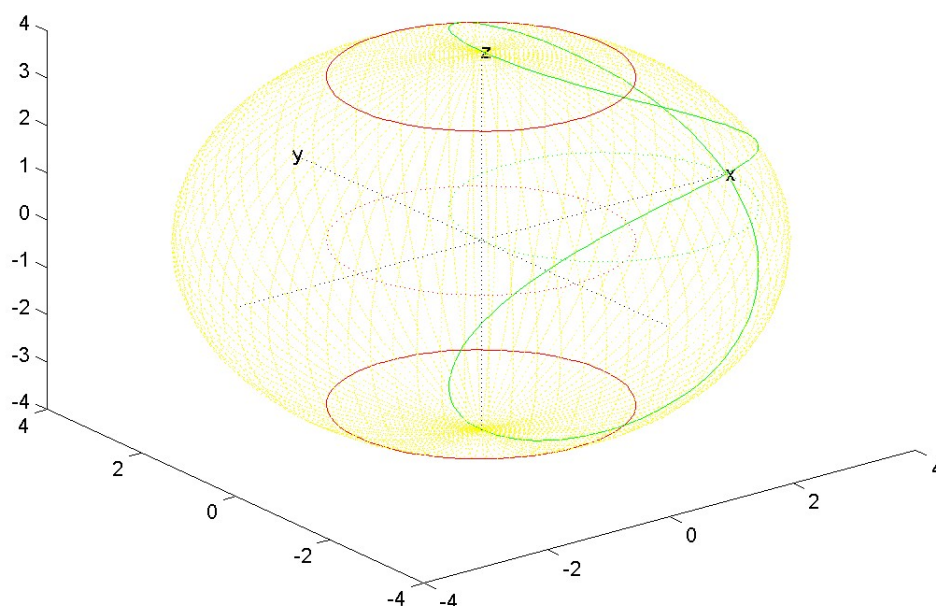
Abychom zachovali přiměřený rozsah tohoto studijního textu a podpořili samostatné uvažování, ponecháváme již čtenáři zodpovězení následujících otázek:



- Jaký je parametr paraboly κ pro $\omega = \omega_0$?
- Jaké jsou délky hlavní a vedlejší poloosy elipsy κ pro $\omega < \omega_0$? Kde leží střed elipsy κ ?
- Jaké jsou délky hlavní a vedlejší poloosy hyperboly κ pro $\omega > \omega_0$? Kde leží střed hyperboly κ ? Která z uvedených poloos je reálná? Kdy je hyperbola κ rovnoosá?

- Co se stane s křivkou κ , nahradíme-li (21) rovnicí $z = h$, případně rovnicí $z/h = x/r + 1$?

Pro úplnost a vysvětlení terminologie ještě poznamenejme, že naše úvahy by bylo možno bez větších obtíží se srovnatelnými výsledky zopakovat pro jakýkoliv rotační nebo i eliptický kužel a libovolnou rovinu v obecné poloze v \mathcal{R}^3 ; pokud by však řídicí křivka kuželu byla parabola nebo hyperbola, nemohla by např. κ být elipsa. Pripustíme-li, že řídicí křivka kuželu není kvadratická, povolíme tím i jiné než kvadratické křivky κ ; takové křivky však už běžně v literatuře nebývají označovány jako kuželosečky. Pokud bychom kužel nahradili válcem ochudili bychom se o případy, kdy je κ hyperbola nebo parabola, κ by nicméně mohla sestávat z dvojice přímek, zde nutně rovnoběžných.



Obr. 8: Křivky vznikající průnikem rotačního válce s kulovou plochou

Prozatím jsme se ovšem zabývali jen průnikem dvou ploch, z nichž jedna byla vždy rovina. Soustředíme se nyní na obecný případ, kdy ani jedna z ploch rovina není. Můžeme se přitom opřít i o dřívější znalosti: tak např. šroubovici z příkladu 2.1 můžeme interpretovat jako průnik šroubového konoidu σ a rotačního válce σ^* , který je popsán obecnou rovnicí

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (27)$$

Následující příklad 5.1 nás pak ještě přesvědčí, že i průnikem jednoduchých kvadratických ploch (problematikou vytváření a klasifikace kvadratických ploch se budeme podrobněji zabývat v dalších kapitolách) může vzniknout složitější než kvadratická křivka.

Příklad 5.1: Vyšetřete křivku κ , která je průsečnicí ploch σ a σ^* , je-li σ pro zadanou konstantu $r \in \mathcal{R}$ určena obecnou rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2, \quad (28)$$

a σ^* je určena obecnou rovnicí (27), případně obecnou rovnicí

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2. \quad (29)$$

Řešení: Parametrické rovnice válce σ^* zadaného obecnou rovnicí (27) jsou

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = s \quad (30)$$

pro $0 \leq t < 2\pi$ a libovolné $s \in \mathcal{R}$. Plocha σ je zřejmě v obou případech kulová, pouze různě posunutá ve směru osy x : v obou případech má poloměr $2r$, v prvním případě má střed $[0, 0, 0]$, ve druhém $[r, 0, 0]$. Dosazením (30) do (28) dostaneme

$$r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) + s^2 = 4r^2$$

neboli

$$(s - r\sqrt{3})(s + r\sqrt{3}) = 0.$$

Poněvadž na κ je $z = s$, sestává zde κ ze dvou kružnic (tedy opět jen rovinných kvadratických křivek) $x^2 + y^2 = r^2$ pro $z = r\sqrt{3}$ a $z = -\sqrt{3}$, což lze zapsat alternativně parametrickými rovnicemi

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = \varepsilon\sqrt{3},$$

v nichž $0 \leq t < 2\pi$ a $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Složitější bude druhý případ s (29) namísto (27). Analogii (30) představují rovnice

$$x = r + r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = s \quad (31)$$

pro $0 \leq t < 2\pi$ a libovolné $s \in \mathcal{R}$. Dosazením (31) do (28) dostaneme

$$r^2 \left((1 + \cos t)^2 + \sin^2 t \right) + s^2 = 4r^2$$

neboli

$$s^2 = 2r^2(1 - \cos t);$$

odtud již vychází

$$s = 2\varepsilon r \sin \frac{t}{2}$$



opět s $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Parametrické rovnice křivky κ , která už evidentně není rovinná, podle (31) tedy jsou

$$x = r + r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = 2\varepsilon r \sin \frac{t}{2}$$

pro $0 \leq t < 2\pi$. Na obr. 8, kde je zvoleno $r = 2$, jsou pro zvýšení názornosti žlutě zvýrazněny vybrané řezy kulové plochy σ rovinami procházejícími osou z ; červeně je naznačen válec σ^* podle (27) – plnou čarou je znázorněna křivka κ , tečkovanou řídicí křivka válce v půdorysně, totéž platí pro alternativní zeleně naznačený válec podle (29).

6 Vytváření ploch, přímkové a rotační plochy

Už v kapitole 2 jsme demonstrovali, jak lze sestavit parametrické rovnice plochy jistých známých geometrických vlastností v \mathcal{R}^3 – konkrétně rovnice šroubového konoidu. Tuto myšlenku nyní rozpracujeme a uplatníme v případě vybraných ploch technické praxe, zejména přímkových a rotačních (a uvidíme, že obojí se nevyklučuje). Přímkové plochy jsou takové plochy, které obsahují nějakou soustavu přímek; to se snadno pozná tak, že pro pevný jeden parametr v parametrických rovnicích příslušné plochy dostáváme rovnici přímky v \mathcal{R}^3 . Přímkovou plochou je tedy např. šroubový konoid (a jak uvidíme později, každý konoid) – i kdybychom si nevzpomněli na jeho konstrukci, stačí zvolit pevný parametr t v (9).



Nejprve se soustředíme na plochy, na nichž lze najít dokonce dvě nezávislé soustavy přímek, tj. naznačený postup lze uplatnit pro libovolný z parametrů. Takovou plochou je zajisté libovolná rovina v \mathcal{R}^3 , mj. i půdorysna, kterou bychom mohli chápat jako rovinu zadanou třemi body $P = [0, 0, 0]$, $Q = [l, 0, 0]$ a $\tilde{P} = [0, h, 0]$ pro zadané délky $l, h \in \mathcal{R}_+$. Uvažujme nyní ještě čtvrtý bod $\tilde{Q} = [l, h, v]$, který se nalézá ve výšce $v \in \mathcal{R}_+$ nad půdorysnou; pokud bychom připustili $v = 0$, degeneroval by prostorový čtyřúhelník $PQ\tilde{Q}\tilde{P}$ (jenž se často v literatuře označuje jako zborcený čtyřúhelník, čímž se zdůrazňuje, že jej nelze rozvinout do žádné roviny) v obdélník v půdorysně. Volme nyní na spojnici PQ body M a na spojnici $\tilde{P}\tilde{Q}$ body \tilde{M} tak, aby zachovávaly tzv. dělicí poměr, tj. aby poměr vzdáleností M od P a Q byl vždy stejný jako poměr vzdáleností \tilde{M} od \tilde{P} a \tilde{Q} . Poněvadž parametrické rovnice spojnice PQ jsou

$$x = lt, \quad y = 0, \quad z = 0$$

pro $t \in R$ ($t = 0$ v bodě P , $t = 1$ v bodě Q) Poněvadž parametrické rovnice spojnice PQ jsou

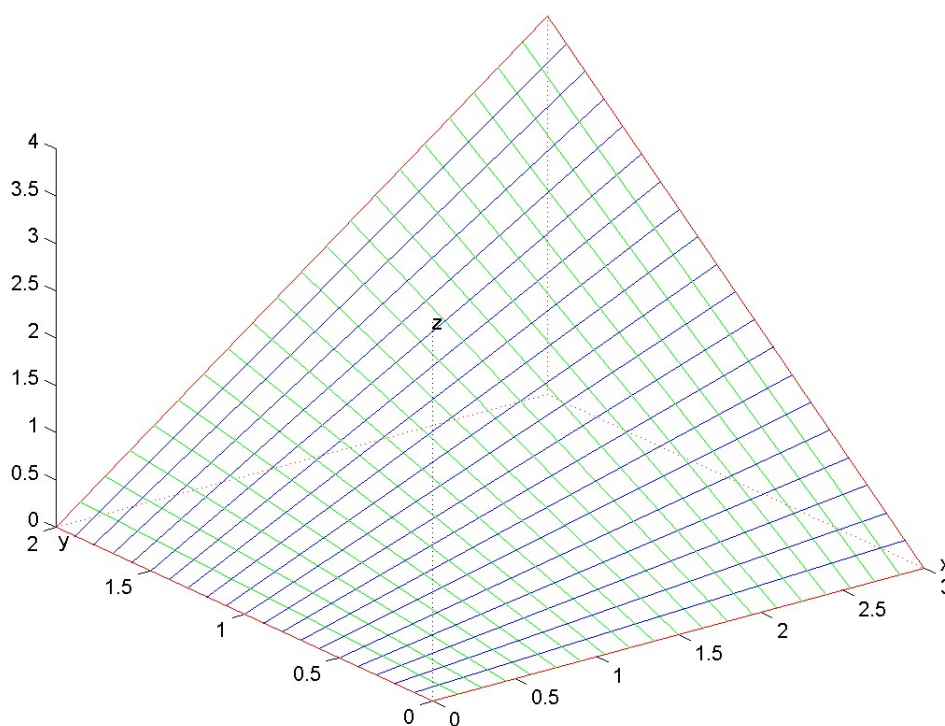
$$x = lt, \quad y = h, \quad z = vt$$

opět pro $t \in R$ ($t = 0$ v bodě \tilde{P} , $t = 1$ v bodě \tilde{Q}), můžeme pro M pohybující se po spojnici PQ a pro \tilde{M} pohybující se souběžně po spojnici $\tilde{P}\tilde{Q}$ sestavit parametrické

rovnice spojnice $M\tilde{M}$

$$x = lt, \quad y = hs, \quad z = vts \quad (32)$$

pro $s \in \mathcal{R}$ jež však už můžeme chápat i jako rovnice jisté přímkové plochy σ pro $t, s \in \mathcal{R}$. Plocha σ evidentně obsahuje dvě soustavy přímek: k ověření této skutečnosti stačí zvolit alternativně pevné t a pevné s . Na obr. 9 je pro $l = 3$, $h = 1$ a $v = 2$, červeně vyznačen prostorový čtyřúhelník PQ , obě soustavy přímek jsou rozlišeny barevně – zeleně a modře, uvažuje se jen $0 \leq t \leq 1$ a $0 \leq s \leq 1$.



Obr. 9: Hyperbolický paraboloid zadaný prostorovým čtyřúhelníkem

Pokusme se nyní z parametrických rovnic (32) sestavit obecnou rovnici σ . Vynásobením prvních dvou rovnic dostaneme ihned $xy = lhts$, porovnáním tohoto výsledku se třetí rovnicí pak vychází

$$\frac{z}{v} = \frac{xy}{lh}.$$

Tato rovnice již silně připomíná zadání příkladu 3.5, navíc totiž obsahuje jen konstanty l , v a h . Aniž bychom tedy pokračovali jejím podrobným rozbořem, můžeme konstatovat, že otočení soustavy souřadnic o úhel $\pi/6$ v půdorysně by i zde vedlo k závěru, že σ je hyperbolický paraboloid. Obdobný výsledek (jen

technicky složitějším a zdlouhavějším postupem) bychom dostali i v případě, že průmětem prostorového čtyřúhelníku $PQ\tilde{Q}\tilde{P}$ do půdorysny by nebyl obdélník, ale obecný (nedegenerovaný) rovinný čtyřúhelník. Kromě roviny a hyperbolického paraboloidu však už v \mathcal{R}^3 neexistuje žádná další plocha, na které by se daly najít dvě nezávislé soustavy přímek. Dalšími přímkovými plochami, které se používají ve stavebním inženýrství, se budeme soustavněji zabývat v osmé kapitole. Ještě v této kapitole si však ozřejmíme, že i některé kvadratické plochy jsou přímkové.

Pokusme se nyní vytvořit nějakou dostatečně obecnou rotační plochu σ . Rotační plocha je taková plocha, která vzniká otáčením nějaké křivky κ kolem zvolené přímky, jež se nazývá osa rotace. Pro jednoduchost budeme důsledně předpokládat, že zvolená osa rotace splývá s osou z ; pokud by to nebyla pravda, máme (přinejmenším teoreticky) k dispozici algoritmy posouvání a otáčení souřadnic ze třetí kapitoly. Pro začátek se soustředíme na případ, že κ leží v nárýsně a neprotíná osu z (nemůže to tedy být např. přímka). Můžeme tedy předpokládat, že κ má parametrické rovnice

$$x = \varphi(s), \quad y = 0, \quad z = \chi(s) \quad (33)$$

pro vhodné reálné hodnoty s . Rotace jednotlivých bodů křivky κ probíhá v rovinách kolmých na osu z ; parametrické rovnice rotační plochy σ tedy jsou

$$x = \varphi(s) \cos t, \quad y = \varphi(s) \sin t, \quad z = \chi(s), \quad (34)$$

kde vždy $0 \leq t < 2\pi$. K sestavení odpovídající obecné rovnice je zapotřebí umět vypočítat s jako funkci z ze třetí rovnice, případně tento výpočet v konkrétním případě nějak vtipně obejít.

Zvlášť názorný je případ tzv. anuloidu, kde κ je pro zadaná kladná čísla r a $R > r$ kružnice o středu $[R, 0, 0]$ a poloměru r . Rovnice (33) tedy lze psát ve tvaru

$$x = R + r \sin s, \quad y = 0, \quad z = r \cos s$$

pro $0 \leq s < 2\pi$; rovnice (34) potom vycházejí ve tvaru

$$x = (R + r \sin s) \cos t, \quad y = (R + r \sin s) \sin t, \quad z = r \cos s.$$

Lépe však lze sestavit i obecné rovnice, vyjdeme-li z alternativní parametrizace (33)

$$x = R + \varepsilon \sqrt{r^2 - s^2}, \quad y = 0, \quad z = s$$

pro $0 \leq s \leq r$, kde navíc $\varepsilon \in -1, 1$; výsledné rovnice (34)

$$x = (R + \varepsilon \sqrt{r^2 - s^2}) \cos t, \quad y = (R + \varepsilon \sqrt{r^2 - s^2}) \sin t, \quad z = s$$

jsou sice zdánlivě složitější, ale umožňují snadné vyloučení s a t : ve třetí rovnici přímo máme $z = s$ a sečtením prvních dvou rovnic povýšených na druhou můžeme odstranit t . Obdržíme tak

$$x^2 + y^2 = (R + \varepsilon \sqrt{r^2 - z^2})^2$$

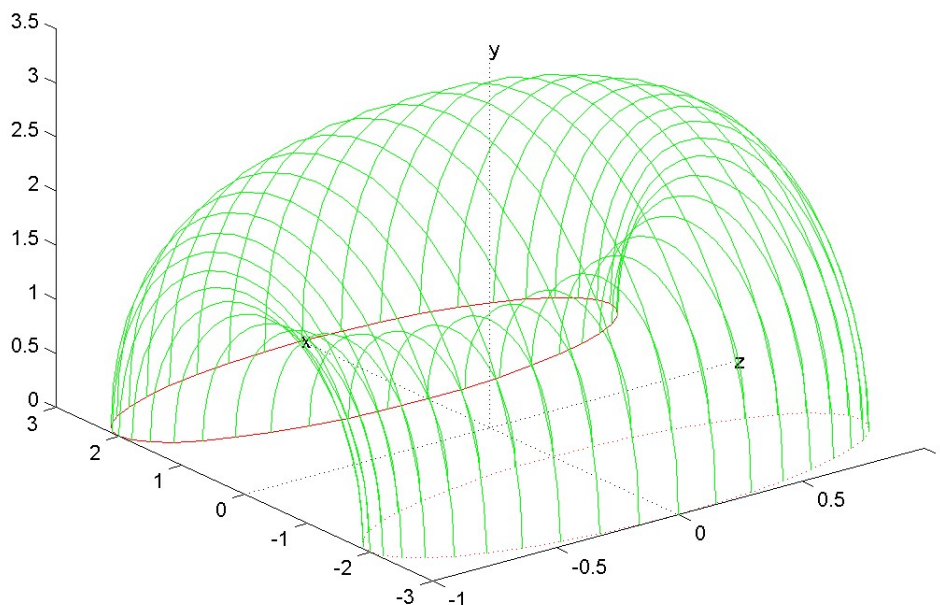
čili (poněvadž $\varepsilon^2 = 1$)

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2 = 2\varepsilon R\sqrt{r^2 - y^2}.$$

Dalším povýšením na druhou už dostaneme výslednou obecnou rovnici anuloidu σ

$$(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 = 4R^2 (r^2 - y^2).$$

Vidíme tak, že anuloid není kvadratická plocha, ale jistá speciální plocha čtvrtého stupně.



Obr. 10: Horní polovina anuloidu

Z obr. 10 je snad dostatečně zřejmé technické využití anuloidu v konstrukci dopravních prostředků, které již před více než sto lety zabránilo v dalším rozmachu průmyslu výroby kolomazi. Vykresluje se jen horní část anuloidu, omezená podmínkou $z \geq 0$. Je nastaveno $R = 2$ a $r = 1$; řídicí kružnice je zakreslena červeně, tečkovaně je navíc naznačen její zrcadlový obraz v nárysně vzhledem k ose z , vybrané kružnice na σ pro diskrétní hodnoty s z (34) jsou znázorněny zeleně.

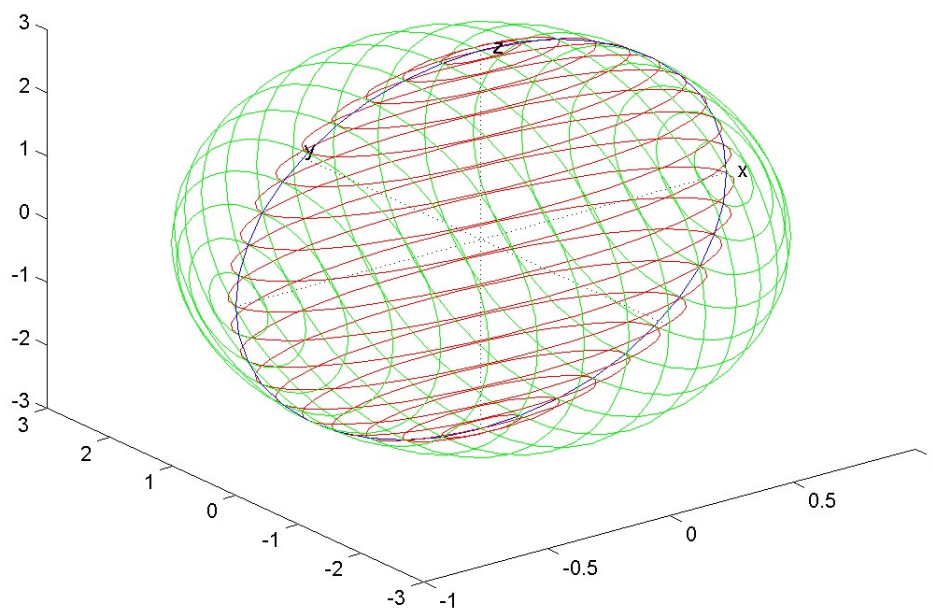
Pokud bychom u anuloidu připustili $0 < R < r$, plocha σ by protínala sama sebe. Pokud bychom dokonce připustili $R = 0$, rotací kružnice kolem osy procházející jejím středem by vznikla kulová plocha. Rotací kvadratických křivek

κ v nárysně kolem osy z lze však vytvořit i řadu dalších kvadratických ploch, jak nám ukáží příklady 6.1, 6.2 a 6.3 a 6.4. Příklad 7.1 navíc naznačí, jak lze tento přístup zobecnit, jestliže rotaci (pohyb po kružnici) nahradíme pohybem po vhodné elipse.

Příklad 6.1: Sestavte obecnou rovnici a parametrické rovnice rotačního elipsoidu σ , který vznikne rotací elipsy κ , jež je zadána rovnicemi

$$x^2 + \frac{z^2}{9} = 1, \quad y = 0,$$

kolem osy z , a rotačního elipsoidu $\tilde{\sigma}$, který vznikne rotací elipsy κ kolem osy x .



Obr. 11: Rotační elipsoidy

Řešení: Nejprve sestavíme rovnice σ . Elipsu κ lze popsat parametrickými rovnicemi

$$x = \cos s, \quad y = 0, \quad z = 3 \sin s \quad (35)$$

pro $0 \leq s < 2\pi$. Parametrické rovnice σ pak jsou

$$x = \cos s \cos t, \quad y = \cos s \sin t, \quad z = 3 \sin s \text{ pro}$$



$0 \leq s < 2\pi$ i $0 \leq t < 2\pi$. Vydělíme-li třetí rovnici třemi, poté všechny rovnice povýšíme na druhou a výsledek sečteme, dostaneme obecnou rovnici σ

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1.$$

Parametrické rovnice $\tilde{\sigma}$ jsou obdobně (mění se role os x a z)

$$x = \cos s, \quad y = 3 \sin s \sin t, \quad z = 3 \sin s \cos t$$

pro $0 \leq s < 2\pi$ i $0 \leq t < 2\pi$. Vydělíme-li druhou a třetí rovnici třemi, poté všechny rovnice povýšíme na druhou a výsledek sečteme, dostaneme obecnou rovnici $\tilde{\sigma}$

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

Vybrané kružnice, které vytvářejí příslušný elipsoid, jsou na obr. 11 pro σ vyznačeny červeně a pro $\tilde{\sigma}$ zeleně; zadaná elipsa κ je zvýrazněna modře. V klasických učebnicích geometrie, poznamenané snahami o zavedení originální české terminologie, se elipsoidy obdobné σ nazývají prodlouženými (případně vejčitými), elipsoidy obdobné $\tilde{\sigma}$ zploštělými (případně čočkovitými).

Příklad 6.2: Sestavte obecnou rovnici a parametrické rovnice rotačního hyperboloidu σ , která vznikne rotací hyperboly κ , jež je zadána rovnicemi



$$x^2 - \frac{z^2}{9} = 1, \quad y = 0,$$

kolem osy z , a rotačního hyperboloidu $\tilde{\sigma}$, která vznikne rotací téže hyperboly κ kolem osy x .

Řešení: Nejprve sestavíme rovnice σ . Hyperbolu κ lze popsat parametrickými rovnicemi



$$x = \varepsilon \sqrt{1 + \frac{s^2}{9}}, \quad y = 0, \quad z = s$$

pro libovolné reálné s , přičemž $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Parametrické rovnice σ pak jsou

$$x = \varepsilon \sqrt{1 + \frac{s^2}{9}} \cos t, \quad y = \varepsilon \sqrt{1 + \frac{s^2}{9}} \sin t, \quad z = s$$

pro libovolné reálné s a $0 \leq t < 2\pi$. Dosadíme-li $s = z$ ze třetí rovnice do prvních dvou, první dvě rovnice povýšíme na druhou a výsledek sečteme, dostaneme obecnou rovnici σ

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{9} = 1.$$

Hyperbolu κ lze rovněž popsat parametrickými rovnicemi

$$x = s, \quad y = 0, \quad z = 3\varepsilon \sqrt{s^2 - 1}$$

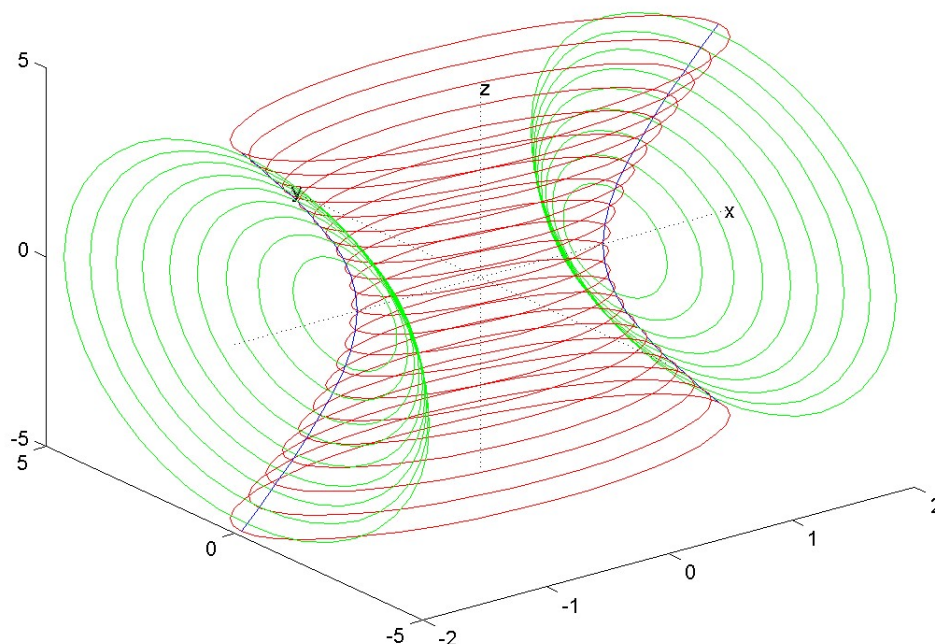
pro $s \leq -1$ nebo $s \geq 1$, přičemž $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Parametrické rovnice $\tilde{\sigma}$ jsou pak (mění se role os x a z)

$$x = s, \quad y = 3\varepsilon\sqrt{s^2 - 1} \sin t, \quad z = 3\varepsilon\sqrt{s^2 - 1} \cos t$$

pro $s \leq -1$ nebo $s \geq 1$ a $0 \leq t < 2\pi$. Dosadíme-li $s = x$ z první rovnice do zbylých dvou, tyto zbylé rovnice po vydělení třemi povýšíme na druhou a výsledek sečteme, dostaneme obecnou rovnici $\tilde{\sigma}$

$$x^2 - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1.$$

Vybrané kružnice, které vytvářejí příslušný hyperboloid, jsou na obr. 12 pro σ vyznačeny červeně a pro $\tilde{\sigma}$ zeleně; zadaná hyperbola κ je zvýrazněna modře. Hyperboloidy obdobné σ se obvykle nazývají jednodílnými, hyperboloidy obdobné $\tilde{\sigma}$ dvoudílnými. Zde se nejedná o pouhou terminologickou poznámku: jak ještě uvidíme, jednodílný hyperboloid je na rozdíl od dvoudílného přímková plocha, přirozené je rovněž zobecnění takového rozlišování i pro nerotační hyperboloidy.



Obr. 12: Rotační hyperboloidy

Příklad 6.3: Sestavte obecnou rovnici a parametrické rovnice rotačního pa-



paraboloidu σ , která vznikne rotací paraboly κ , jež je zadána rovnicemi

$$x^2 - \frac{z}{3} = 0, \quad y = 0,$$

kolem osy z , a rotačního paraboloidu $\tilde{\sigma}$, která vznikne rotací paraboly $\tilde{\kappa}$, jež je zadána rovnicemi

$$z^2 - \frac{x}{3} = 0, \quad y = 0,$$

kolem osy x .

Řešení: Nejprve sestavíme rovnice σ . Parabolu κ lze popsat parametrickými rovnicemi

$$x = s, \quad y = 0, \quad z = 3s^2$$

pro libovolné reálné s . Parametrické rovnice σ pak jsou

$$x = s \cos t, \quad y = s \sin t, \quad z = 3s^2$$

pro libovolné reálné s a $0 \leq t < 2\pi$. Povýšíme-li první dvě rovnice na druhou, třetí vydělíme třemi a výsledek sečteme, dostaneme obecnou rovnici σ

$$\frac{z}{3} = x^2 + y^2.$$

Rovnice $\tilde{\kappa}$ a $\tilde{\sigma}$ lze sestavit pouhou záměnou role x a z : parabola $\tilde{\kappa}$ má parametrické rovnice

$$x = 3s^2, \quad y = 0, \quad z = s$$

pro libovolné reálné s , parametrické rovnice $\tilde{\sigma}$ jsou

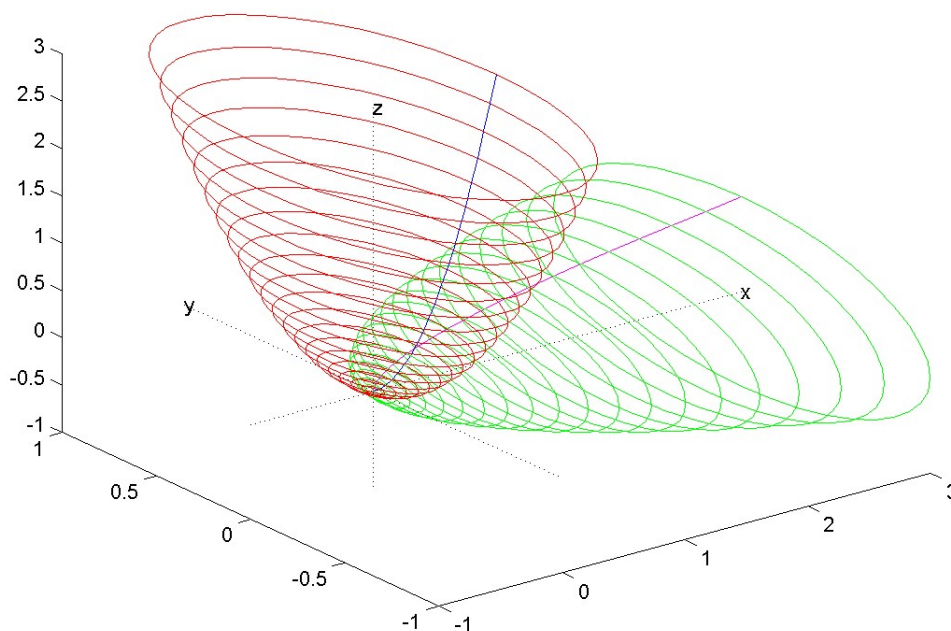
$$x = 3s^2, \quad y = s \sin t, \quad z = s \cos t$$

pro libovolné reálné s a $0 \leq t < 2\pi$, čemuž odpovídá obecná rovnice

$$\frac{x}{3} = y^2 + z^2.$$

Vybrané kružnice, které vytvářejí příslušný paraboloid, jsou na obr. 13 pro σ vyznačeny červeně a pro $\tilde{\sigma}$ zeleně; zadaná parabola κ je zvýrazněna modře, zadaná parabola $\tilde{\kappa}$ fialově.





Obr. 13: Rotační paraboloidy

Příklad 6.4: Sestavte obecnou rovnici a parametrické rovnice rotačního kuželu σ , který vznikne rotací přímky p , jež je zadána rovnicemi

$$x - \frac{z}{3} = 0, \quad y = 0,$$

kolem osy z , a rotačního válce $\tilde{\sigma}$, který vznikne rotací přímky \tilde{p} , jež je zadána rovnicemi

$$x - 3 = 0, \quad y = 0,$$

kolem stejné osy.

Řešení: Obě plochy σ a $\tilde{\sigma}$ jsou jednak rotační, jednak přímkové; jednodušší bude uvažovat je jako přímkové. Tvořící přímky kuželu σ spojují vrchol $[0, 0, 0]$ s jednotlivými body kružnice κ v rovině $z = 3$, která má parametrické rovnice

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 3$$

pro $0 \leq t < 2\pi$. Parametrické rovnice σ tedy jsou

$$x = s \cos t, \quad y = s \sin t, \quad z = 3s$$



pro $0 \leq t < 2\pi$ a $0 \leq s \leq 1$. Dosazením $s = z/3$ podle třetí rovnice do prvních dvou rovnic, jejich povýšením na druhou a následným sečtením vychází obecná rovnice σ

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{9} = 0.$$

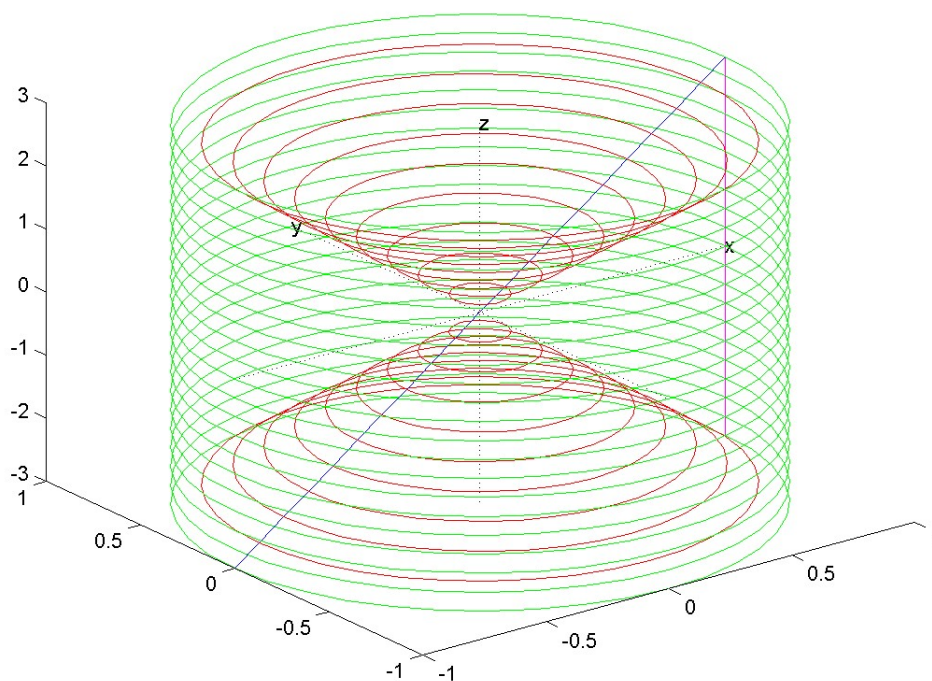
Tvořící přímky válce $\tilde{\sigma}$ vedené jednotlivými body kružnice κ jsou rovnoběžné s osou z . Parametrické rovnice $\tilde{\sigma}$ jsou tak pouze

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = s$$

pro $0 \leq t < 2\pi$ a $0 \leq s \leq 1$. Třetí z těchto rovnic dále ani nevyužijeme; jinak stejným postupem jako pro σ dostaneme obecnou rovnici $\tilde{\sigma}$

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Tu jsme nicméně mohli psát ihned bez výpočtu – obecná rovnice $\tilde{\sigma}$ v \mathcal{R}^3 musí být shodná s obecnou rovnicí κ v \mathcal{R}^2 . Vybrané kružnice, které vytvářejí příslušný kužel, jsou na obr. 14 pro σ vyznačeny červeně a pro $\tilde{\sigma}$ zeleně; zadaná přímka p je společně s kružnicí κ zvýrazněna modře, zadaná přímka \tilde{p} fialově.



Obr. 14: Rotační kužel a válec



Při konstrukci rotačních ploch jsme se prozatím omezili na případy, kdy rotující křivka ležela v rovině osy rotace; v příkladech 6.1, 6.2 a 6.3 se navíc jednalo o kvadratické křivky s některou osou splývající s osou rotace, v příkladu 6.4 dokonce o přímky. Možných zobecnění se nabízí mnoho: pro ilustraci si aspoň všimneme případu, kdy kolem osy z bude rotovat mimoběžná přímka p , a vytvářet tak rotační přímkovou plochu σ . Pro jednoduchost budeme předpokládat, že pro nějaké reálné konstanty u , v , x_0 a y_0 má přímka p směrový vektor $(u, v, 1)$ a prochází bodem $[x_0, y_0, 0]$; předem vyloučíme všechny případy $x_0v = y_0u$. Přímka p má potom parametrické rovnice

$$x = x_0 + ut, \quad y = y_0 + vt, \quad z = t$$

pro libovolné $t \in \mathcal{R}$. Rovnice plochy σ tedy vychází

$$x = \sqrt{(x_0 + ut)^2 + (y_0 + vt)^2} \cos s, \quad y = \sqrt{(x_0 + ut)^2 + (y_0 + vt)^2} \sin s, \quad z = t$$

pro totéž t a $0 \leq s < 2\pi$. Dosadíme-li do prvních dvou rovnic ze třetí $t = z$, povýšíme je na druhou a sečteme, obdržíme obecnou rovnici σ ve tvaru

$$x^2 + y^2 = (x_0 + uz)^2 + (y_0 + vz)^2;$$

vidíme již, že se jedná o kvadratickou plochu, zbývá jen vyšetřit, o kterou. Jednoduchými algebraickými úpravami dostaneme

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + 2(x_0u + y_0v)z + (u^2 + v^2)z^2,$$

po vydělení $u^2 + v^2$ potom ve snaze zbavit se nepříjemného druhého aditivního členu na pravé straně

$$\frac{x^2 + y^2}{u^2 + v^2} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{u^2 + v^2} - \left(\frac{x_0u + y_0v}{u^2 + v^2} \right)^2 + \left(z + \frac{x_0u + y_0v}{u^2 + v^2} \right)^2$$

neboli

$$\frac{x^2 + y^2}{u^2 + v^2} - \left(z + \frac{x_0u + y_0v}{u^2 + v^2} \right)^2 = \left(\frac{x_0v - y_0u}{u^2 + v^2} \right)^2.$$

Poněvadž $x_0v \neq y_0u$, nemůže být pravá strana rovna nule. Můžeme tedy celou rovnici vydělit pravou stranou; tak dostaneme

$$\frac{u^2 + v^2}{(x_0v + y_0u)^2} (x^2 + y^2) - \left(\frac{u^2 + v^2}{x_0v - y_0u} \right)^2 \bar{z}^2 = 1,$$

kde

$$\bar{z} = z + \frac{x_0u + y_0v}{u^2 + v^2}$$

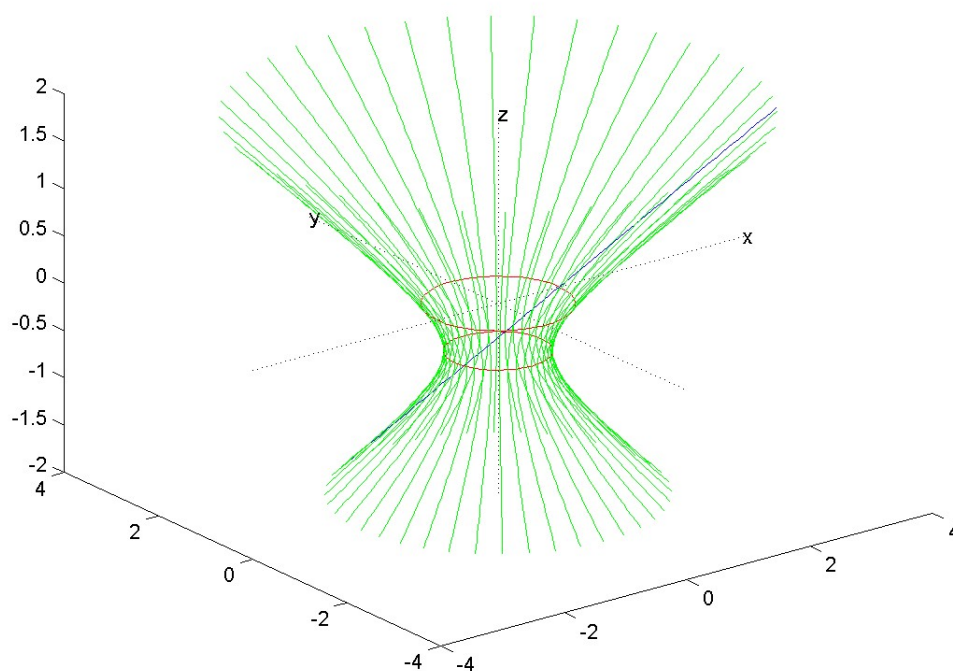
realizuje posunutí ve směru osy z . Porovnáme-li tento výsledek s příkladem 6.2, můžeme vidět, že jde o dvoudílný hyperboloid; podrobněji se ovšem ke klasifikaci

kvadratických ploch vrátíme v následující kapitole. Na obr. 15 je zadaná přímka pro $u = v = x_0 = 1$ a $y_0 = 0$ zvýrazněna modře, červeně je naznačena rotace v rovinách $z = 0$ a $\bar{z} = 0$, vybrané povrchové přímky σ jsou vykresleny zeleně.

Pro hlubší pochopení předchozích úvah může být užitečné samostatné zodpovězení následujících otázek:



- Jak se může kvalitativně změnit posledně studovaná přímková plocha, připustíme-li $x_0v = y_0u$?
- Jaká plocha vznikne, má-li přímka p namísto směrového vektoru $(u, v, 1)$ směrový vektor $(u, v, 0)$? Může to být (celá) rovina?
- Bude i plocha σ z příkladu 6.3 kvadratická, bude-li parabola κ rotovat kolem osy x namísto osy z ?



Obr. 15: Jednodílný hyperboloid jako přímková plocha

7 Kvadratické plochy

V této kapitole se soustředíme na rozlišování kvadratických ploch podle jejich obecných rovnic. Poněvadž jsme se až dosud zabývali jen rotačními a přímko-

vými kvadratickými plochami, ukážeme si nejprve na příkladu 7.1, jak lze snadno namísto rotačních ploch vytvářet obecnější, v nichž se namísto obvyklé rotace, charakterizované pohybem po kružnici, uvažuje jistá zobecněná rotace, charakterizovaná pohybem po elipse (délka hlavní a vedlejší poloosy elipsy nemusí tedy být stejná).

Příklad 7.1: Sestavte obecnou rovnici (obecného, tzv. trojosého) elipsoidu σ , která vznikne zobecněnou rotací elipsy κ z příkladu 6.1 definovanou tak, že namísto po kružnici bude každým řezem σ rovinou rovnoběžnou s půdorysnou elipsa, jejíž délka hlavní poloosy ve směru osy x bude dvojnásobkem poloměru rotace z příkladu 6.1 a délka vedlejší poloosy ve směru osy y bude polovinou poloměru rotace z příkladu 6.1.

Řešení: Z parametrických rovnic elipsy κ (35) snadno sestavíme parametrické rovnice σ

$$x = 2 \cos s \cos t, \quad y = \frac{1}{2} \cos s \sin t, \quad z = 3 \sin s$$

pro $0 \leq s < 2\pi$ i $0 \leq t < 2\pi$; od (36) se tyto rovnice liší pouze součinitelem 2 namísto 1 v první rovnici a součinitelem $\frac{1}{2}$ namísto 1 ve druhé rovnici. I nadále můžeme postupovat stejně jako v příkladu 6.1: stačí, vydělíme-li předem první rovnici dvěma a druhou vynásobíme dvěma. Výsledná obecná rovnice σ je

$$\frac{x^2}{4} + 4y^2 + \frac{z^2}{9} = 1.$$

Poznamenejme ještě, že takovou rovnici bychom dostali z (36) v nových souřadnicích také jednoduchou afinitou (11) pro

$$M_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

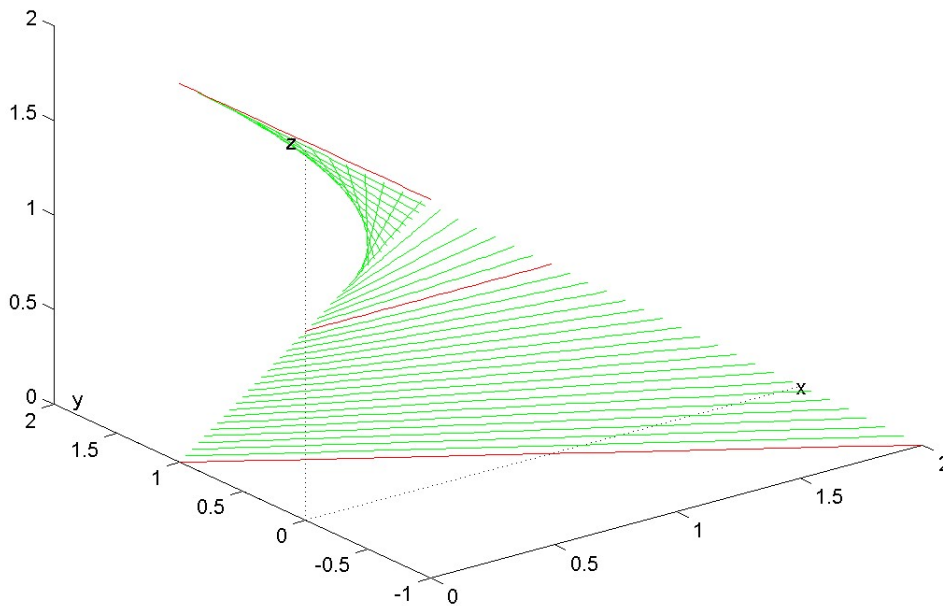
Tato transformace evidentně není ani posunutím, ani otočením – to však právě potřebujeme, chcíce zadaným způsobem deformovat kružnice v elipsy. Grafické znázornění ponecháme čtenáři; výsledek bude (až na měřítko na osách x a y) stejný jako v příkladu 6.1.

Postup se zobecněnou rotací z příkladu 7.1 lze použít nejen pro sestavení rovnic obecného elipsoidu, ale i obecného (jednodílného i dvoudílného) hyperboloidu, eliptického paraboloidu, kuželu či válce – v tomto smyslu by bylo možno modifikovat i příklady 6.2, 6.3 a 6.4.

Přímkovými plochami jsou (kromě rovin) jen tyto kvadratické plochy: jednodílný hyperboloid (nemusí být rotační), z paraboloidů (tj. z kvadratických ploch různých od kuželů, jejichž rovinnými řezy mohou být paraboly) jen hyperbolický paraboloid a také jakýkoliv válec nebo kužel, vznikající obdobně jako v příkladu 6.4 – jen řídicí křivkou v případě válce může být elipsa (u rotačního



válce speciálně kružnice) parabola nebo hyperbola, podle čehož rozlišujeme eliptický, parabolický a hyperbolický válec, zatímco v případě válce jsme už ve třetí kapitole shledali, že na řídicí kvadratické křivce tolik nezáleží (tato křivka i vrchol válce nebo osa kuželu mohou být pochopitelně v obecné poloze). Příklad 7.2 však poukáže ještě na jiný způsob vytváření kvadratických ploch: takové plochy mohou vznikat i jako přímky různoběžné se třemi mimoběžnými přímkami, tzv. příčky tří mimoběžek. Obdobná úloha hledání příček dvou mimoběžek má nekonečně mnoho řešení – připomeňme si v této souvislosti např. oblíbenou úlohu lineární analytické geometrie v \mathcal{R}^3 o hledání tzv. střední příčky dvou mimoběžek, tj. takové příčky dvou mimoběžek, která mimoběžky protíná v bodech o nejmenší možné vzájemné vzdálenosti (tedy vlastně vzdálenosti dvou mimoběžek).



Obr. 16: Kvadratická plocha vytvořená z příček tří mimoběžek

Příklad 7.2: Přímkami p_1 , p_2 a p_3 jsou zadány takto: p_1 je spojnicí bodů $[1, 0, 0]$ a $[0, 1, 0]$, p_2 prochází bodem $[0, 0, 1]$ rovnoběžně s osou x a p_3 prochází bodem $[0, 0, 2]$ rovnoběžně s osou y . Ověřte, zda soustava přímek p různoběžných s p_1 , p_2 i p_3 vytváří nějakou kvadratickou plochu σ . Pokud ano, sestavte její parametrické rovnice a obecnou rovnici a zvažte, o jakou plochu se jedná.

Řešení: Žádné dvě z přímek p_1 , p_2 a p_3 nemají zřejmě společný bod – viz obr. 17; má tedy smysl pokračovat v odvození. Parametrické rovnice přímek p_1 , p_2 a



p_3 postupně jsou

$$\begin{aligned}x &= t, & y &= 1 - t, & z &= 0, \\x &= s, & y &= 0, & z &= 1, \\x &= 0, & y &= q, & z &= 2\end{aligned}$$

pro libovolná $t, s, q \in \mathcal{R}$. Zvolíme-li pevně parametr t , vybereme si tím konkrétní bod P na p_1 . Spojnice P s jiným bodem na p_2 má směrový vektor $(s - t, t - 1, 1)$, zatímco Spojnice P s ještě jiným bodem na p_3 má směrový vektor $(-t, q + t - 1, 2)$. Tyto dva směrové vektory, byvše vztaheny k bodu P , by obecně určovaly v \mathcal{R}^3 rovinu; my však chceme, aby určovaly pouze přímku: musejí být tedy kolineární, tj. musí současně platit $2(s - t) = -t$ a $2(t - 1) = q + t - 1$, a tedy $s = t/2$ a $q = t - 1$. Parametrické rovnice σ tak lze zapsat ve tvaru

$$x = t \left(1 - \frac{\xi}{2} \right), \quad y = (1 - t)(1 - \xi), \quad z = \xi$$

pro $t, \xi \in \mathcal{R}$. Dosazením $\xi = z$ z třetí rovnice do první rovnice vychází

$$t = \frac{2x}{2 - z},$$

dosazením tohoto výsledku do druhé rovnice pak

$$y = \left(1 - \frac{2x}{2 - z} \right) (1 - z),$$

což je již jistý tvar obecné rovnice σ . Vynásobením celé rovnice $2 - z$ dostaneme $(2 - z)y = (2 - z - 2x)(1 - z)$ čili

$$2 - 2x - 2y - 3z + 2xz + yz + z^2 = 0; \quad (37)$$

vidíme tedy, že σ je skutečně kvadratická plocha. V dalším textu se seznámíme s algoritmem, podle něhož lze zjistit, o kterou plochu se jedná, včetně případného určení středu, poloměru či délek poloos apod. V tomto konkrétním příkladu by však realizace tohoto algoritmu byla složitá a zdlouhavá, proto aspoň předběžně vyšetřeme σ jiným (méně obecným) způsobem, využívajícím poznatků z minulé kapitoly. Rovnici (37) nejprve formálně přepíšeme jako

$$2(x - 1)z + (y - 1)z - 2(x - 1) - 2(y - 1) = 2,$$

a tak pro posunutě souřadnice $\bar{x} = x - 1$ a $\bar{y} = y - 1$ obdržíme

$$2\bar{x}z + \bar{y}z - 2\bar{x} - 2\bar{y} = 2.$$

Pro všechna reálná čísla ϑ dostáváme dvě nezávislé soustavy přímek, vyjádřených jako průsečnice rovin: první ve tvaru

$$2\bar{x} + \bar{y} = \vartheta, \quad \bar{y} + 2 = \vartheta\bar{z}$$

a druhou ve tvaru

$$\bar{y} + 2 = \vartheta(2\bar{x} + \bar{y}), \quad \bar{z} = \vartheta;$$

plocha σ je tedy hyperbolický paraboloid. Na obr. 17 jsou červeně zvýrazněny přímky p_1 , p_2 a p_3 , zeleně pak vybrané přímky plochy σ .

Nyní jsme dostatečně připraveni porozumět algoritmu, který nám umožní klasifikovat jakoukoliv kvadratickou plochu v \mathcal{R}^3 na základě její obecné rovnice. Připomeňme, že obdobným problémem jsme se pro kvadratické křivky v \mathcal{R}^2 soustavně zabývali ve čtvrté kapitole; nyní však můžeme očekávat podstatně více různých možností, a tak se nejprve dohodneme na tom, co budeme považovat za rovnice jednotlivých typů. Předně budeme za rovnice stejného typu považovat takové, jež lze vzájemně převádět pouhou cyklickou záměnou proměnných od (x, y, z) přes (z, x, y) k (y, z, x) : nebudeme tedy muset zvlášť studovat např. plochu $x^2 - y^2 + 3z^2 = 1$, pokud již budeme znát vlastnosti plochy $3x^2 + y^2 - z^2 = 1$; takovou záměnu by stejně bylo možno interpretovat jako speciální otočení v R^3 . Za rovnice stejného typu budeme navíc považovat i takové, jež lze vzájemně převádět rovněž jinou vzájemnou záměnou proměnných x , y a z , tím vlastně povolíme i změnu orientace souřadnicových os: nebudeme tedy muset zvlášť studovat např. ani plochu $y^2 - x^2 + 3z^2 = 1$. Zájemci o co nejobecnější kritéria, formulovaná na základě jistých speciálních charakteristik, neměnicích se při transformaci souřadnic posunutím a otočením (tzv. ortogonálních invariantů) nebo aspoň při transformaci souřadnic samotným otočením (tzv. ortogonálních semiinvariantů), vyžadujících vyčíslování řady determinantů druhého až čtvrtého řádu, najdou nicméně úplné informace v tabulkách [3], str.212.



Analogicky (12) vzniká obecná rovnice kvadratické plochy σ v \mathcal{R}^3

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + ax + by + cz + d = 0; \quad (38)$$

je tedy přirozeným zobecněním rovnice roviny (7), v níž kromě konstant $a, b, c, d \in R$ vystupují i další konstanty $A, B, C, D, E, F \in R$. Prochází-li σ počátkem souřadnic, můžeme opět bez újmy na obecnosti volit $d = 0$, v opačném případě stačí volit $d = -1$. Pokud je (38) v $A = B = C = D = E = F = 0$, je σ rovina v \mathcal{R}^3 s populární obecnou rovnicí $ax + by + cz = 1$ nebo $ax + by + cz = 0$; tímto případem se dále nebudeme zabývat. Posouváním a otáčením soustavy souřadnic (x, y, z) podle druhé kapitoly jinak umíme (aspoň teoreticky, skutečný výpočet může být velmi pracný) převést (38) s $d = 0$ či $d = -1$ do aspoň jednoho z následujících tvarů:

- (a) $A = D = E = a = 0$ nebo $B = D = F = b = 0$ nebo $C = E = F = c = 0$, tj. jedna ze souřadnic bude zcela chybět,
- (b) $D = E = F = a = b = c = 0$ a současně $A \neq 0$, $B \neq 0$ a $C \neq 0$, tj. souřadnice zbudou pouze v ryzích kvadratických členech,

- (c) totéž s $A = 0$, avšak s $a \neq 0$ namísto $A \neq 0$, případně totéž s $B = 0$, avšak s $b \neq 0$ namísto $B \neq 0$, případně totéž s $C = 0$, avšak s $c \neq 0$ namísto $C \neq 0$.

Případem (a) se nemusíme podrobně zabývat: stačí si připomenout diskusi nad (13), (14) a (15). Je-li některou z těchto tří rovnic určena křivka κ v půdorysně, je σ válec, jehož tvořící přímky jsou rovnoběžky s osou z vedené body křivky κ ; pro $Ax^2 + By^2 = 0$ s kladným A i B dostáváme ovšem namísto kvadratické plochy pouze osu z . Při případné cyklické záměně proměnných se pochopitelně může půdorysna měnit v nárýsnu či bokorysnu; tuto evidentní skutečnost už dále nebudeme opakovaně zdůrazňovat.

V případě (b) dostaneme nakonec vždy jednu z rovnic:

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = 1, \quad (39)$$

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 - \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = 1, \quad (40)$$

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 - \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = -1, \quad (41)$$

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 - \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = 0; \quad (42)$$

$$(43)$$

α , β a γ jsou kladná čísla, charakterizující délky poloos plochy σ ; tato plocha má vždy střed v počátku souřadnic. Pro úplnost poznamenejme, že teoreticky bychom ještě mohli dostat i modifikaci (39) s nulou na pravé straně, takové rovnici by však vyhovoval právě počátek souřadnic.

Rovnice (39) popisuje elipsoid σ . Jsou-li dvě z čísel α , β a γ shodná, je σ rotační elipsoid. Platí-li $\alpha = \beta = \gamma$, je σ kulová plocha (a α je pochopitelně její poloměr).

Rovnice (40) popisuje jednodílný hyperboloid, rovnice (41) dvoudílný hyperboloid σ . Reálné jsou pro (40) pouze poloosy na souřadnicových osách x a y , pro (41) pouze poloosy na souřadnicových osách y a z . Je-li v (40) nebo (41) $\alpha = \beta$, je σ rotační jednodílný hyperboloid. Speciální názvosloví pro $\alpha = \gamma$ či $\beta = \gamma$ v (40) či (41), které by zobecňovalo pojem rovnoosé hyperboly v \mathcal{R}^2 , se používá zřídka, a zde je proto neuvádíme.

Rovnice (42), jejíž alternativní tvar zřejmě je

$$\left(\frac{z}{\gamma} + \sqrt{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2}\right) \left(\frac{z}{\gamma} - \sqrt{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2}\right) = 0,$$

popisuje kužel σ : řezy rovinami rovnoběžnými s půdorysnou jsou elipsy (kromě samotné půdorysny, kde elipsa degeneruje v jediný bod $[0, 0, 0]$). Je-li $\alpha = \beta$, bývá plocha σ (z ryze formálních důvodů) označována jako rotační kužel.

V případě (c) dostaneme nakonec vždy jednu z rovnic:

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\mu} = 2\varepsilon z, \quad (44)$$

$$\frac{x^2}{\lambda} - \frac{y^2}{\mu} = 2\varepsilon z, \quad (45)$$

kde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$; λ a μ jsou kladná čísla, interpretovatelná jako parametry parabol, které vznikají řezem plochy σ nárysnou a bokorysnou; osou této plochy je osa z a vrcholem bod $[0, 0, 0]$.

Rovnice (44) popisuje eliptický paraboloid σ . Je-li $\lambda = \mu$, je σ rotační paraboloid. Půdorysna je vždy tečnou rovinou σ . Je-li $\varepsilon = 1$, leží σ nad půdorysnou ($z > 0$) s výjimkou svého vrcholu ($x = y = z = 0$); je-li $\varepsilon = -1$, leží σ analogicky pod půdorysnou ($z < 0$).

Rovnice (45) popisuje hyperbolický paraboloid σ . I zde je půdorysna vždy tečnou rovinou σ , vrchol σ je však sedlovým bodem a ε rozhoduje jen o orientaci parabol, jež jsou řezy σ rovinami rovnoběžnými s nárysnou a bokorysnou.

Nové příklady kvadratických ploch snad už ani nepotřebujeme, pro osvojení navrženého algoritmu může být nicméně užitečné zamyslet se nad následujícími otázkami:



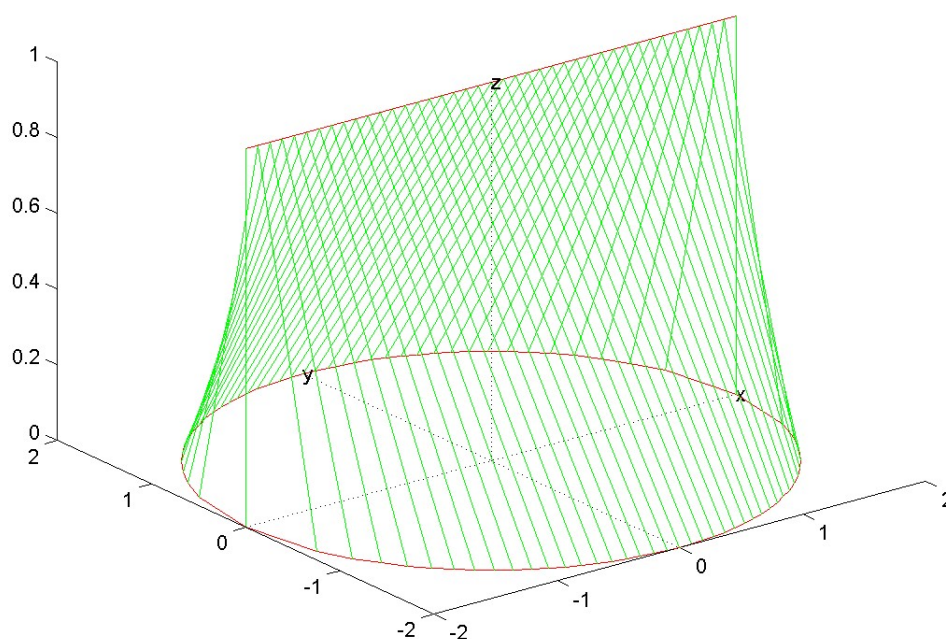
- Jak se se znalostí právě navrženého algoritmu zjednoduší úvahy při řešení příkladů 3.4 a 3.5?
- Pokud bychom chtěli analogicky zpracovat i příklad 7.2, co by bylo nejobtížnější?
- Jak lze na některý z vyjmenovaných tvarů uvést obecnou rovnici válce s řídicí parabolou $y = x^2$ v půdorysně a vrcholem $[0, 0, 1]$?
- Proč jsme speciálně nerozlišovali eliptický, parabolický a hyperbolický kužel; jde vůbec o různé kvadratické plochy?

8 Speciální přímkové plochy a konoidy

V příkladu 7.2 jsme vytvářeli plochu, která protínala trojici přímek p_1 , p_2 a p_3 v \mathcal{R}^3 ; výsledkem byla jistá kvadratická plocha σ . Přirozeným zobecněním je pokusit se přímkovou plochu σ sestavit tak, aby protínala tři zadané křivky κ_1 ,



κ_2 a κ_3 ; očekávaným výsledkem bude nějaká plocha σ , složitější než kvadratická, ale možná použitelnější v technické praxi. Speciální přímková plocha, vznikne, nahradíme-li křivku κ_3 nevlastní přímkou některé (např. souřadnicové) roviny τ ; tvořící přímky σ pak protínají dvě křivky κ_1, κ_2 a jsou rovnoběžné s rovinou τ , σ se obecně nazývá konoid. Ve druhé kapitole jsme se již seznámili se speciálním případem šroubového konoidu: κ_1 byla šroubovice, κ_2 osa z a τ půdorysna. V této kapitole nebudeme budovat obecnou teorii přímkových ploch, ale soustředíme se jen na vybrané plochy, často používané ve stavebním inženýrství. Nejprve se všimneme dalších nejznámějších konoidů. Křivky κ_1, κ_2 a případně i κ_3 budou na všech obr. vyznačeny červeně, vybrané přímky plochy σ zeleně; v zájmu přehlednosti budou někdy zobrazeny jen technicky významné části ploch.



Obr. 18: Kruhový konoid

U kruhového konoidu je křivkou κ_1 kružnice κ v půdorysně

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad z = 0$$

a křivkou κ_2 přímka p o rovnici $z = h$ v nárysně ($y = 0$), rovinou τ je půdorysna; zadány jsou kladný poloměr r a kladná výška h . Parametrické rovnice κ lze zapsat ve tvaru

$$x = t, \quad y = \varepsilon\sqrt{r^2 - t^2}, \quad z = 0,$$

kde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ a $t \in \mathcal{R}$, zatímco parametrické rovnice p pro totéž t jsou

$$x = t, \quad y = 0, \quad z = h.$$

Odtud snadno dostaneme parametrické rovnice σ

$$x = t, \quad y = s\varepsilon\sqrt{r^2 - t^2}, \quad z = (1 - s)h,$$

v nichž vystupuje navíc jen $s \in \mathcal{R}$. Povýšením druhé rovnice na druhou a vynásobením výsledku číslem h^2 dostaneme

$$(hy)^2 = s^2(r - t)^2.$$

Z první a třetí rovnice máme přímo $t = x$ a $hs = h - z$; po dosazení tak vychází obecná rovnice σ čtvrtého stupně

$$(hy)^2 = (h - z)^2(r^2 - x^2).$$

Na obr. 18 je zvoleno $r = 2$ a $h = 1$.

U Küpperova konoidu je křivkou κ_1 kružnice κ (jiná než u kruhového konoidu) v půdorysně

$$x^2 + y^2 = rx, \quad z = 0,$$

a křivkou κ_2 osa z , rovinou τ je rovina $x = z$; zadán je kladný poloměr r . Kružnici κ lze také zadat předpisem

$$\left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2, \quad z = 0,$$

z něhož vycházejí parametrické rovnice

$$x = \frac{r}{2}(1 + \cos t), \quad y = \frac{r}{2}\sin t, \quad z = 0, \quad (46)$$

kde $0 \leq t < 2\pi$. Parametrické rovnice osy z jsou

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = q,$$

kde $q \in \mathcal{R}$. Poněvadž normálový vektor roviny τ je $(1, 0, -1)$, může být směrovým vektorem tvořící přímky plochy σ jedině vektor $\nu(1, u, 1)$ pro $\nu \in \mathcal{R}$; ν je nějaký reálný součinitel. Týž směrový vektor však má mít také složky

$$\nu = \frac{r}{2}(1 + \cos t), \quad \nu u = \frac{r}{2}\sin t, \quad \nu = -q, .$$

Porovnáním pravých stran první a třetí rovnice obdržíme

$$q = -\frac{r}{2}\sin t,$$

a parametrické rovnice σ tedy jsou

$$x = \frac{rs}{2}(1 + \cos t), \quad y = \frac{rs}{2} \sin t, \quad z = \frac{r(s-1)}{2}(1 + \cos t),$$

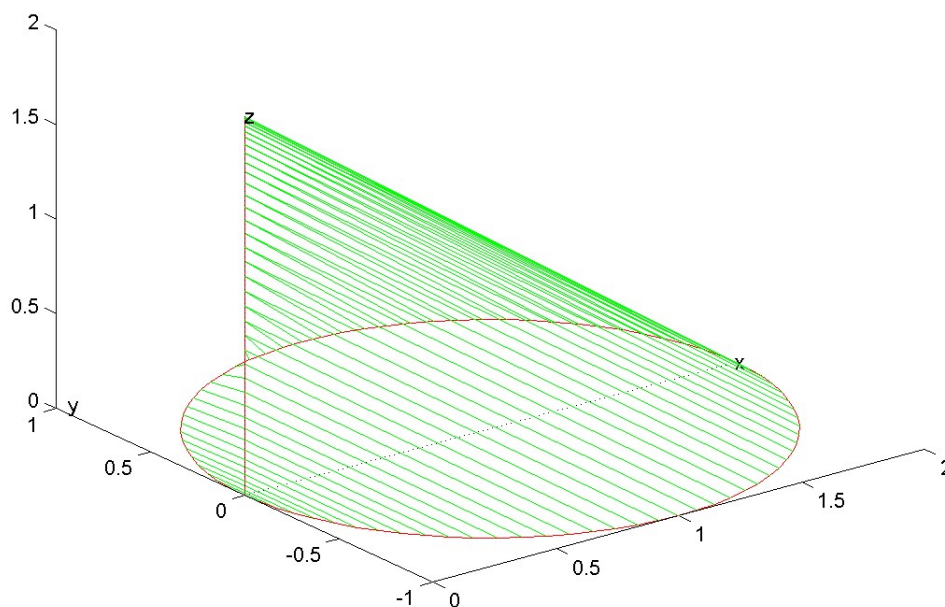
opět navíc s $s \in \mathcal{R}$. Přímým výpočtem odtud dostaneme

$$(x^2 + y^2)(x - z) = s^2 \left(\frac{r}{2}\right)^2 (2 + \cos t) \frac{r}{2} (1 + \cos t) = \left(\frac{rs}{2}(1 + \cos t)\right)^2 r;$$

odtud již dosazením z první parametrické rovnice vychází obecná rovnice σ třetího stupně

$$(x^2 + y^2)(x - z) = rx^2.$$

Na obr. 19 je zvoleno $r = 2$.



Obr. 19: Küpperův konoid

U Plückerova konoidu je křivkou κ_1 elipsa $\tilde{\kappa}$ v rovině $x = z \operatorname{tg} \omega$, jejímž kolmým průmětem do půdorysny je stejná kružnice κ jako u Küpperova konoidu, zatímco křivkou κ_2 je opět osa z , rovinou τ je půdorysna; zadán je kladný poloměr r a kladný úhel $\omega < \pi/2$. Modifikací (46) snadno dostaneme parametrické rovnice $\tilde{\kappa}$

$$x = \frac{r}{2}(1 + \cos t), \quad y = \frac{r}{2} \sin t, \quad z = \frac{r}{2}(1 + \cos t) \operatorname{tg} \omega,$$

kde $0 \leq t < 2\pi$. Obdobně můžeme zapsat i parametrické rovnice potřebné části osy z

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{r}{2}(1 + \cos t) \operatorname{tg} \omega.$$

Parametrické rovnice σ tedy jsou

$$x = \frac{rs}{2}(1 + \cos t), \quad y = \frac{rs}{2} \sin t, \quad z = \frac{r}{2}(1 + \cos t) \operatorname{tg} \omega,$$

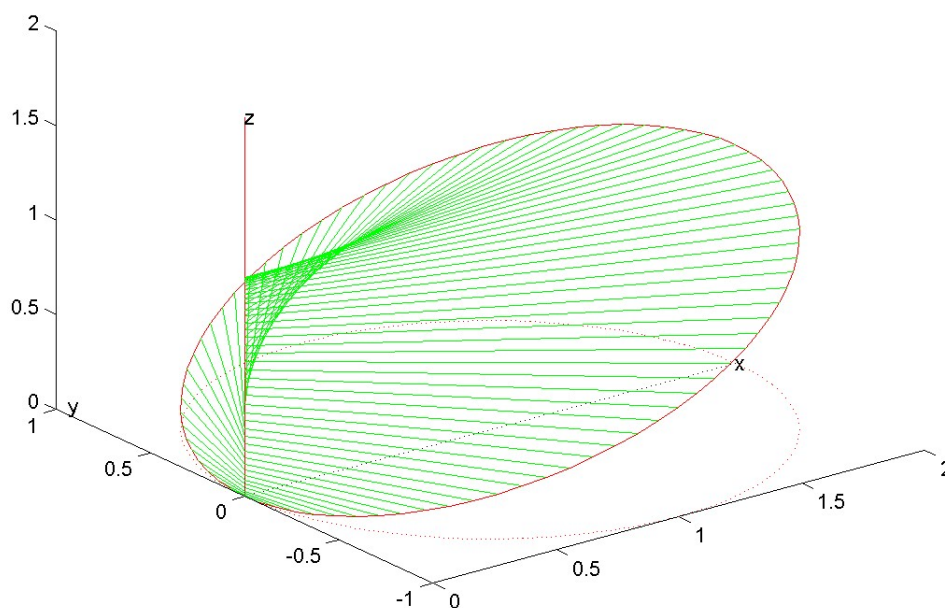
opět navíc s $s \in \mathcal{R}$. Přímým výpočtem odtud dostaneme

$$(x^2 + y^2)z = \left(\frac{r}{2}\right)^2 s^2(2 + 2s \cos t) \frac{r}{2}(1 + \cos t) \operatorname{tg} \omega = \left(\frac{s}{2}(1 + \cos t)\right)^2 r \operatorname{tg} \omega;$$

odtud již dosazením z první parametrické rovnice vychází obecná rovnice σ třetího stupně

$$(x^2 + y^2)(x - z) = rx^2 \operatorname{tg} \omega.$$

Na obr. 20 je zvoleno $r = 2$ a $\omega = \pi/6$.



Obr. 20: Plückerův konoid

Na rozdíl od konoidů jsou oblouky přímkové plochy zadané speciálními křivkami κ_1 , κ_2 a κ_3 , jimiž jsou přímky nebo kružnice. Jejich rovnice bývají obvykle

komplikovanější než u konoidů. U montpellierského oblouku je křivkou κ_1 kružnice κ v nárysně

$$x^2 + z^2 = r^2, \quad y = 0,$$

křivkou κ_2 osa y a křivkou κ_3 taková přímka p rovnoběžná s osou x , že $y = l$ a $z = h$; zadán je kladný poloměr r a kladná čísla l a $h > r$, charakterizující polohu p . Parametrické rovnice κ jsou

$$x = r \cos t, \quad y = 0, \quad z = r \sin t,$$

kde $0 \leq t < 2\pi$, zatímco parametrické rovnice osy y můžeme psát jako

$$x = 0, \quad y = w, \quad z = 0,$$

kde $w \in \mathcal{R}$, a parametrické rovnice p jako

$$x = q, \quad y = l, \quad z = h,$$

kde $q \in \mathcal{R}$. Směrové vektory přímek σ musejí být $(r \cos t, -w, r \sin t)$, ale také $\nu(q, l - w, h)$, přičemž ν je nějaký reálný součinitel. Z trojice podmínek

$$r \cos t = \nu q, \quad -w = \nu(l - w), \quad r \sin t = \nu h$$

tak postupně, procházejíce od třetí přes duhou k první, dostáváme

$$\nu = \frac{r \sin t}{h}, \quad w = \frac{\nu l}{\nu - 1} = \frac{lr \sin t}{r \sin t - h}, \quad q = \frac{r \cos t}{\nu} = \frac{h}{\operatorname{tg} t}$$

(všimněme si, že poslední rovnici dále nebudeme ani potřebovat). Parametrické rovnice σ jsou

$$x = rs \cos t, \quad y = (1 - s)w, \quad z = rs \sin t,$$

kde $0 \leq t < 2\pi$ a $s \in \mathcal{R}$, čili po dosazení za w jako funkci t

$$x = rs \cos t, \quad y = (1 - s) \frac{lr \sin t}{r \sin t - h}, \quad z = rs \sin t.$$

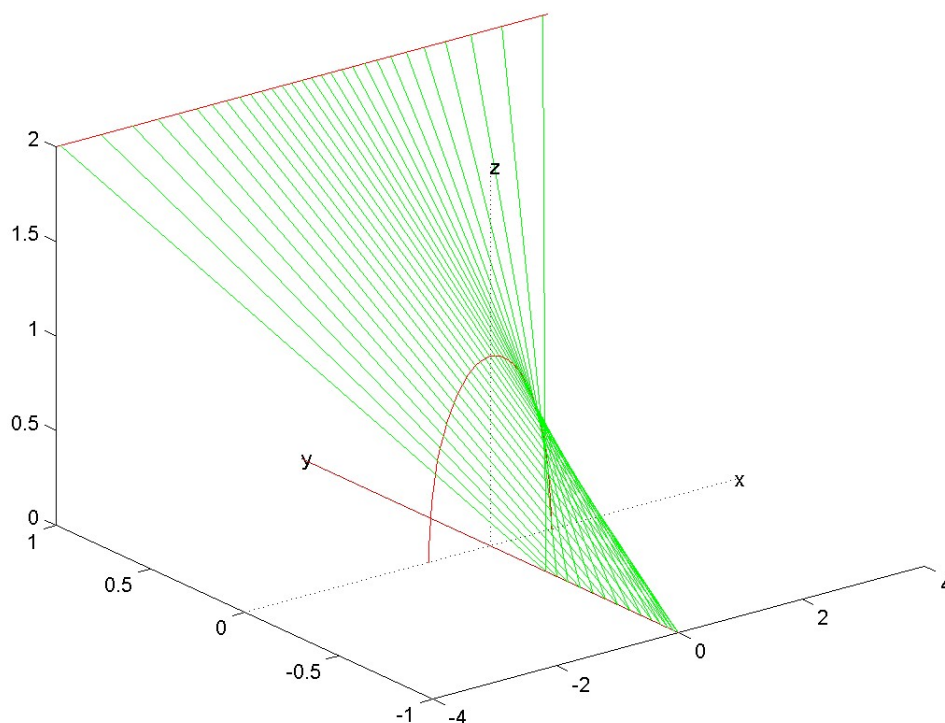
Vynásobíme-li druhou z těchto rovnic výrazem $s(r \sin t - h)$, obdržíme

$$y(rs \sin t - sh) = lrs \sin t(1 - s)$$

neboli podle třetí rovnice $y(z - sh) = lz(1 - s)$. To lze zapsat (po vynásobení r) také ve tvaru $rs(lz - hy) = r(l - y)z$, případně povýšením na druhou jako $(rs)^2(lz - hy)^2 = r^2(l - y)^2z^2$. Přitom však na základě první a třetí rovnice (stačí obě rovnice povýšit na druhou a sečíst) víme, že $(rs)^2 = x^2 + y^2$, takže již vlastně dostáváme obecnou rovnici σ čtvrtého stupně

$$(x^2 + y^2)(lz - hy)^2 = r^2(l - y)^2z^2.$$

Na obr. 21 je zvoleno $r = l = 1$ a $h = 2$.



Obr. 21: Montpellierský oblouk

Jen nepatrně složitější než montpellierský oblouk se zdá být marseillský oblouk, u něhož je druhá přímka p nahrazena v rovině rovnoběžné s nárysnou druhou kružnicí $\tilde{\kappa}$ o zadaném kladném poloměru R s parametrickými rovnicemi

$$x = R \cos q, \quad y = l, \quad z = h + R \sin q,$$

kde $0 \leq q < 2\pi$; to však stačí výrazně zkomplikovat sestavení potřebných rovnic. Pokusme se zopakovat postup použitý pro montpellierský oblouk. Směrové vektory přímek σ musejí být $(r \cos t, -w, r \sin t)$, ale také $\nu(R \cos q, l - w, h + R \sin q)$, přičemž ν je nějaký reálný součinitel. Z trojice podmínek

$$r \cos t = \nu R \cos q, \quad -w = \nu(l - w), \quad r \sin t = \nu(h + R \sin q) \quad (47)$$

bychom rádi po zkušenostech z minulého příkladu vyjádřili ν a w pomocí jediného parametru t nebo q ; zde (na rozdíl od minulého příkladu) dáme přednost q . Pak už bychom totiž byli schopni (aspoň teoreticky) přejít od parametrických rovnic σ

$$x = Rs \cos q, \quad y = ls + w(1 - s), \quad z = (h + R \sin q)s, \quad (48)$$

kde $0 \leq q < 2\pi$ a $s \in \mathcal{R}$, k obecné rovnici. Umocníme-li první a třetí rovnici (47) na druhou a výsledek sečteme, obdržíme

$$r^2 = \nu^2(R^2 + h^2 + 2Rh \sin q),$$

takže

$$\nu = \frac{\varepsilon r}{\sqrt{R^2 + h^2 + 2Rh \sin q}},$$

kde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Ze druhé rovnice pak vychází

$$w = \frac{\nu l}{\nu - 1} = \frac{\varepsilon r l}{\varepsilon r - \sqrt{R^2 + h^2 + 2Rh \sin q}}, \quad (49)$$

což je právě w vyjádřené pomocí q , potřebné ve druhé rovnici (48). Z (48) bychom nyní měli vyloučit ještě parametry q a s , a dostat tak ze tří parametrických rovnic σ jako obvykle jednu obecnou. Převedeme-li ve třetí rovnici (48) člen hs na levou stranu, první a třetí rovnici poté umocníme na druhou a výsledek sečteme, obdržíme

$$x^2 + (z - sh)^2 = R^2 s^2,$$

což je vlastně kvadratická rovnice pro neznámou s

$$(R^2 - h^2)s^2 + 2hzs - (x^2 + z^2),$$

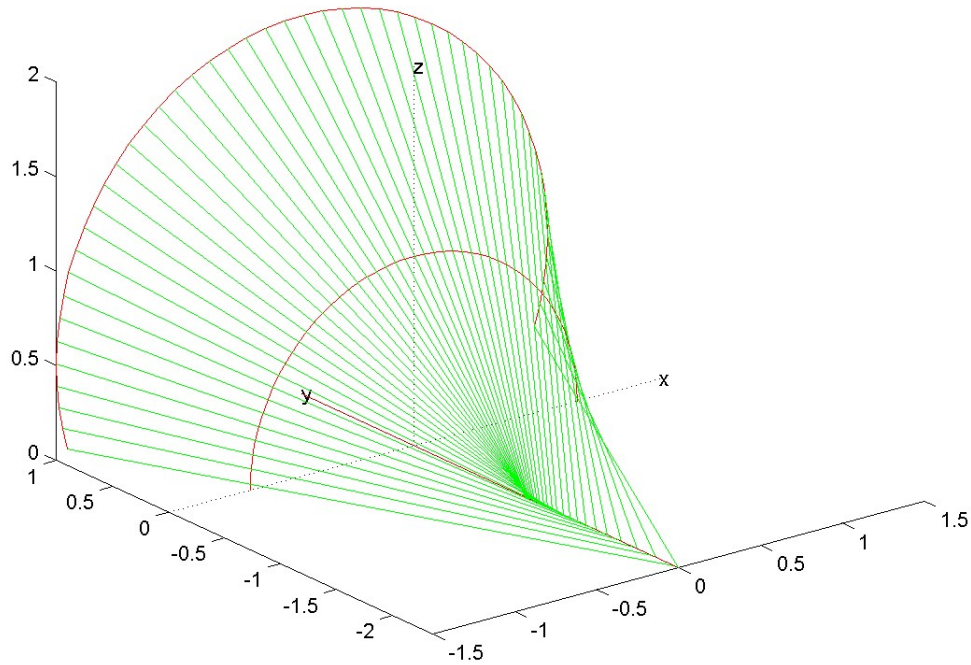
jejíž řešení je

$$\begin{aligned} s &= \frac{-2hz + \tilde{\varepsilon} \sqrt{4h^2 z^2 + 4(R^2 - h^2)(x^2 + z^2)}}{2(R^2 - h^2)} \\ &= \frac{-hz + \tilde{\varepsilon} \sqrt{(R^2 - h^2)x^2 + R^2 z^2}}{R^2 - h^2}, \end{aligned} \quad (50)$$

kde $\tilde{\varepsilon} \in \{-1, 1\}$. Ze třetí rovnice (48) ještě vypočteme

$$R \sin q = \frac{z}{s} - h; \quad (51)$$

zde sice musíme dělit s , o němž navíc předpokládáme $s \neq 0$, nicméně pro $s = 0$ bychom dostali jen osu y . Po dosazení s z (51) do (50) a uplatnění výsledku společně s (50) ve druhé (dosud nepoužité) rovnici (48) s w podle (49) dostaneme značně složitou obecnou rovnici σ , která však obsahuje ještě druhé odmocniny a součinitele ε a $\tilde{\varepsilon}$. Podrobné rozepisování této obecné rovnice lze doporučit jen zvláště pečlivým a vytrvalým čtenářům, případně zkušeným uživatelům softwaru umožňujícího rychlé formální manipulace s aritmetickými výrazy (MAPLE, MATLAB, MathCAD, Mathematica apod.); ostatním snad stačí vyzradit, že po pracném odstranění odmocnin opakovaným umocňováním na druhou bude výsledná obecná rovnice σ šestého stupně. Současně na příkladu marseillského oblouku vidíme, že obecná rovnice nějaké plochy σ může sice existovat, ale pro praktické výpočty se mohou jevit jako výrazně vhodnější parametrické rovnice. Na obr. 22 je zvoleno $r = l = 1$, $R = 3/2$ a $h = 1/2$.



Obr. 22: Marseillský oblouk

Pro čtenáře, kterým není cizí programování v MATLABu, snad bude zajímavý i zdrojový kód programu, pomocí něhož byl vytvořen obr. 22 (a obdobně i všechny ostatní obr.) – znalost obecné rovnice σ nebyla potřebná:



```

r=1; l=1; R=3/2; h=1/2;
q=0:.025*pi:pi; n=length(q);
x=r*cos(q); y=zeros(n,1); z=r*sin(q);
plot3(x,y,z,'r'); hold on

q0=atan(h/R); q=-q0:.025*pi:pi+q0; n=length(q);
x=R*cos(q); y=ones(n,1)*1; z=h+R*sin(q);
plot3(x,y,z,'r');

w=r*1./(r-sqrt(R^2+h^2+2*R*h*sin(q))); w0=min(w);
plot3([0 0],[w0 1],[0 0],'r');
text(R,0,0,'x'); plot3([-R R],[0 0],[0 0],'k:');
text(0,1,0,'y'); plot3([0 0],[w0 1],[0 0],'k:');
text(0,0,h+R,'z'); plot3([0 0],[0 0],[0 h+R],'k:');

```



```

s=[0 1]; for k=1:n,...
  x=R*s*cos(q(k)); y=l*s+w(k)*(1-s); z=(h+R*sin(q(k)))*s;
  plot3(x,y,z,'g'); axis tight; end
print marseill.jpg -djpeg90

```

Dvě řídicí kružnice a jedna řídicí přímka jsou typické nejen pro marseillský oblouk, ale i pro plochu šikmého průchodu., u níž je κ_1 osa y a κ_2 a κ_3 jsou dvě kružnice κ a $\tilde{\kappa}$ shodné velikosti v rovinách rovnoběžných s nárysnou, avšak s navzájem posunutým středem ve směru osy x : κ je charakterizována (jako řez rotačního válce rovinou) rovnicemi

$$(x - h)^2 + z^2 = r^2, \quad y = l,$$

$\tilde{\kappa}$ obdobně rovnicemi

$$(x + h)^2 + z^2 = r^2, \quad y = -l;$$

zadány jsou kladný poloměr r a kladná posunutí l a h . Uvažujme nejprve průmět κ_* kružnice κ do náryсны ($y = 0$). Rovina $z = \varepsilon s x$ pro libovolnou nezápornou reálnou směrnici $s \in \mathcal{R}$ a $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ obsahuje automaticky osu y a v nárysně se zobrazí do jisté přímky p (pouze bokorysnu budeme muset vyšetřit samostatně – zde nemáme k dispozici vhodné s). Pro průsečík p a κ_* platí $(x - h)^2 + (s x)^2 = r^2$, což lze interpretovat jako kvadratickou rovnici s neznámou x

$$(1 + s^2)x^2 - 2hx + h^2 - r^2,$$

jež má vždy (omezíme-li se na nezáporná z) řešení

$$x = \frac{2h + \varepsilon \sqrt{4h^2 - 4(1 + s^2)(h^2 - r^2)}}{2(1 + s^2)} = \frac{h + \varepsilon \sqrt{r^2 + s^2(r^2 - h^2)}}{1 + s^2}.$$

Zaměníme-li κ_* za průmět kružnice $\tilde{\kappa}$ do náryсны, dostaneme stejný výraz pro vyčíslení x , jen s $-h$ namísto h . Parametrické rovnice σ tedy jsou

$$x = \frac{-h + \varepsilon \sqrt{r^2 + s^2(r^2 - h^2)}}{1 + s^2} + \frac{2h}{1 + s^2}t, \quad y = -l + 2lt,$$

$$z = \varepsilon s \left(\frac{-h + \varepsilon \sqrt{r^2 + s^2(r^2 - h^2)}}{1 + s^2} + \frac{2h}{1 + s^2}t \right),$$

kde $t, s \in \mathcal{R}$ a $\varepsilon \in \{-1, 1\}$; při sestavení nejjednodušší druhé rovnice jsme využili skutečnosti, že y se musí měnit pro jakkoliv zvolené s úměrně t . Vynásobíme-li první rovnici $(1 + s^2)$ a dosadíme za t , vypočtené ze třetí rovnice, dostaneme

$$(1 + s^2)x = -h + \varepsilon \sqrt{r^2 x^2 + (r^2 - h^2)s^2 x^2} + \frac{h}{l}(y + l).$$



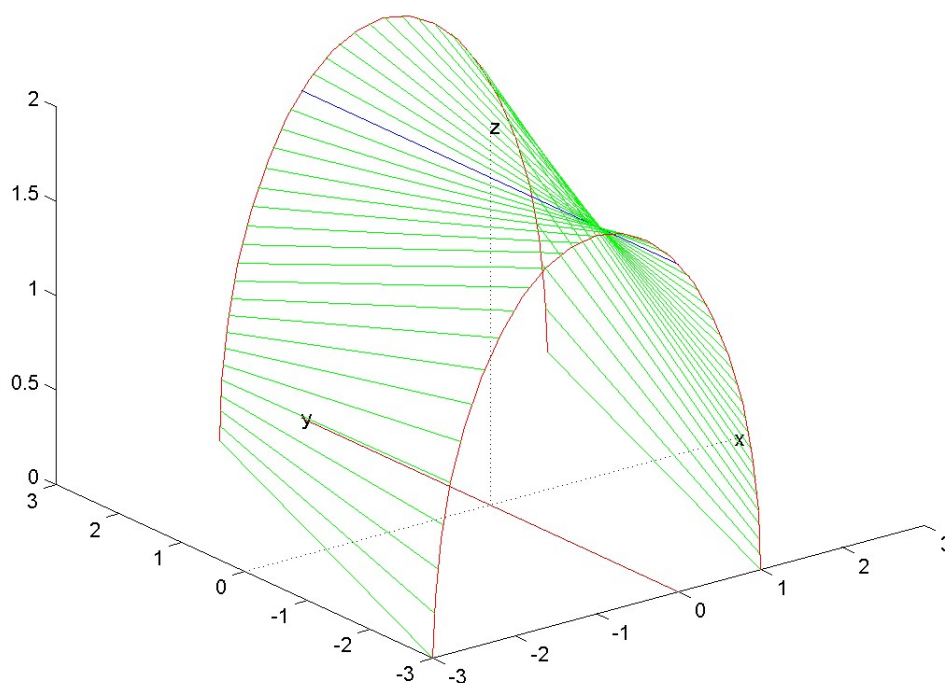
Současně však víme, že $s^2 = z^2/x^2$ (což je zřejmé i porovnáním první a třetí rovnice), takže po vynásobení tohoto výsledku x máme

$$x^2 + z^2 - \frac{h}{l}xy = \varepsilon\sqrt{x^2 + (r^2 - h^2)z^2};$$

povýšením této rovnice na druhou již vznikne obecná rovnice σ čtvrtého stupně

$$((x^2 + z^2) - \frac{h}{l}xy)^2 = x^2 + (r^2 - h^2)z^2.$$

Na obr. 23 je zvoleno $r = 2$, $l = 3$ a $h = 1$. Speciálně v dosud zanedbávaném případě $x = 0$ (i zde je $y = -l + 2lt$) je stále $z = \sqrt{r^2 - h^2}$; tato s půdorysnou rovnoběžná přímka patříci σ je na obr. 23 pro rozlišení zvýrazněna modře.



Obr. 23: Plocha šikmého průchodu

Smyslem tohoto učebního textu není připomínat skutečné stavební objekty, na nichž je použito jednotlivých analyzovaných křivek či ploch, učiňme však (po šroubovém konoidu) ještě jednu výjimku. Nejzajímavější na výřezu z pohlednice zbytků hradu ve Štramberku na obr. 24 nejsou nahodilí turisté, ale to, co je vidět z „žabího pohledu“ jen částečně: horní část zastřešení pověstné věže zvané Trúba. Plocha štramberské Trúby je přímková plocha, jejíž řídicí kružnice κ i

řídící přímka p jsou stejné jako u kruhového konoidu; nejedná se však o konoid, neboť funkci řídící roviny přebírá v bokorysně ležící druhá přímka \tilde{p} v zadané kladné výšce H nad půdorysnou, tedy přímka s parametrickými rovnicemi

$$x = 0, \quad y = q, \quad z = H,$$

kde $q \in \mathcal{R}$. Tvořící přímky plochy σ musejí mít současně směrový vektor $(r \cos t - w, r \sin t, -h)$ a $\nu(-w, q, H - h)$, kde ν je nějaký reálný součinitel, a musí tedy platit

$$r \cos t - w = -w, \quad r \sin t = \nu q, \quad -h = \nu(H - h).$$

Ze třetí, druhé a první rovnice postupně vypočteme

$$\nu = -\frac{h}{H - h}, \quad q = \frac{r \sin t}{\nu} = -\frac{r(H - h) \sin t}{h}, \quad w = \frac{r \cos t}{1 - \nu} = \frac{r(H - h) \cos t}{H}.$$

Parametrické rovnice σ jsou

$$x = w(1 - s), \quad y = qs, \quad z = h + (H - h)s,$$

kde $t, s \in \mathcal{R}$; po dosazení za q a w tedy dostaneme

$$x = \frac{r(H - h) \cos t}{H}(1 - s), \quad y = -\frac{r(H - h) \sin t}{h}s, \quad z = h + (H - h)s.$$

Vynásobíme-li první rovnici HS a druhou rovnicí $-h(1 - s)$ a druhé mocniny obou výsledků následně sečteme, obdržíme

$$x^2 H^2 s^2 + y^2 h^2 (1 - s)^2 = r^2 (H - h)^2 s^2 (1 - s)^2,$$

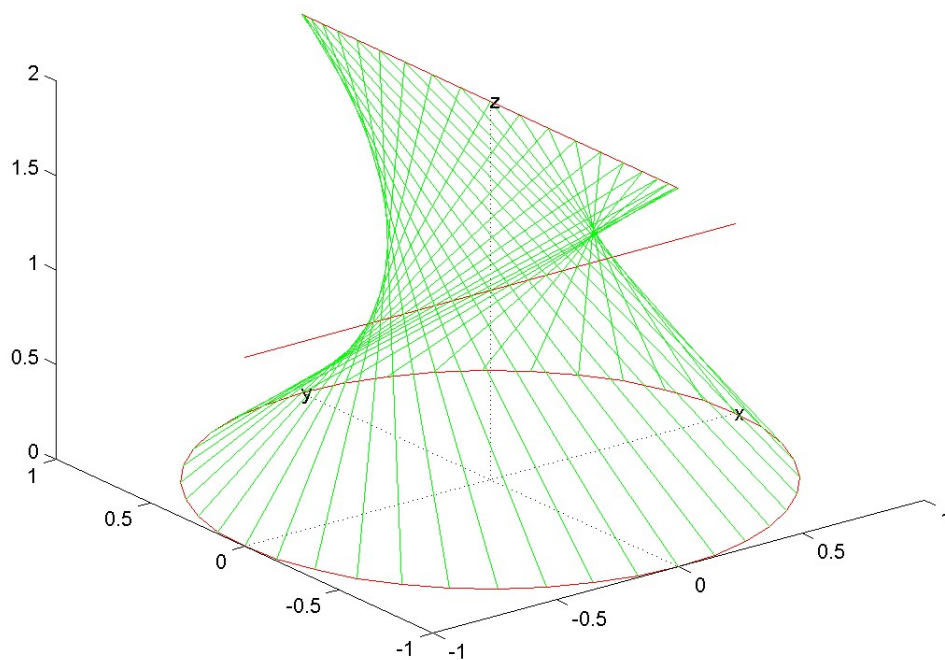
odkud dosazením za s ze třetí ze zmiňovaných rovnic, tedy

$$s = \frac{z - h}{H - h}, \quad 1 - s = \frac{H - z}{H - h},$$

po vynásobení $(H - h)^2$ vychází obecná rovnice σ čtvrtého stupně

$$H^2 x^2 (z - h)^2 + h^2 y^2 (z - H)^2 = r^2 (z - h)^2 (z - H)^2.$$

Na obr. 24 je zvoleno $r = 2$, $h = 1$ a $H = 2$; na Trúbě je realizována (v jiném měřítku) jen část plochy pro $0 \leq z \leq h$.



Obr. 24: Plocha štramberské Trúby

Naposledy si položíme ještě několik doplňujících otázek (s tím, že poslední z nich nás navádí k základní myšlence konstrukce tzv. Hacarových ploch, dosedajících v přímkách na půdorysnu):



- Co se stane s plochou šikmého průchodu, připutíme-li $h = 0$?
- Bylo by u monPELLIERSKÉHO oblouku možné vykreslit i přímky ležící v půdorysně?
- Proč nelze montPELLIERSKÝ oblouk vůbec definovat pro $h = 0$? Co se pro $h = 0$ stane s marseillským obloukem?
- Jakého stupně bude plocha, která vznikne takovým posouváním paraboly $y = -2x^2$ po parabole $y = z^2$ že posouvaná parabola zůstává v rovině rovnoběžné s nárysnou? Co se o ní dá říci podrobnějšího? Jaký je řez této plochy půdorysnou? Bylo by možné tuto plochu jednoduše upravit tak, aby její řez půdorysnou byl obdélník?

9 Rozvinutelné a zborcené plochy

Plochy, jimiž jsme se zabývali v předešlých kapitolách, měly většinou jednu nepříjemnou vlastnost, a to nejen z hlediska praktického lepení papírových modelů staveb studenty architektury: jednalo se o plochy, které není možné rozvinout do roviny. Takové plochy se tradičně nazývají zborcené; zborcená bude i tzv. plocha vinutého sloupku z příkladu 9.1, známá nejen z barokních oltářů, již zde uvádíme, abychom demonstrovali, že ne všechny plochy stavební praxe jsou rotační či přímkové. Ukazuje se, že z kvadratických ploch jsou (pochopitelně kromě roviny) do roviny rozvinutelné pouze válce a kužely. Rozvinutelné jsou však i tečné plochy prostorových křivek, z nichž nejpopulárnější je asi rozvinutelná šroubová plocha z příkladu 9.2. V žádném z příkladů (obdobně jako u šroubového konoidu) ovšem nedostaneme plochu σ nějakého celočíselného algebraického stupně – obecná rovnice nebude polynomická.

Příklad 9.1: Sestavte parametrické rovnice a obecnou rovnici plochy vinutého sloupku σ , která vznikne pohybem kružnice $\tilde{\kappa}$ o poloměru $r \in \mathcal{R}_+$ v půdorysně, při němž se střed κ přemísťuje po šroubovici κ , která má pro poloměr $R \in \mathcal{R}_+$ a pro výšku závitů $h \in \mathcal{R}_+$ parametrické rovnice

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad z = \frac{ht}{2\pi}, \quad (52)$$

kde $0 \leq t \leq 2\pi$, leží-li $\tilde{\kappa}$ při pohybu stále v rovině rovnoběžné s půdorysnou.

Řešení: Formulace zadání umožňuje ihned psát parametrické rovnice σ

$$x = R \cos t + r \cos s, \quad y = R \sin t + r \sin s, \quad z = \frac{ht}{2\pi},$$

kde $0 \leq t \leq 2\pi$ a $0 \leq s < 2\pi$ Převědeme-li první aditivní člen v první a druhé rovnici vždy na levou stranu, obě rovnice povýšíme na druhou a výsledek sečteme, dostaneme

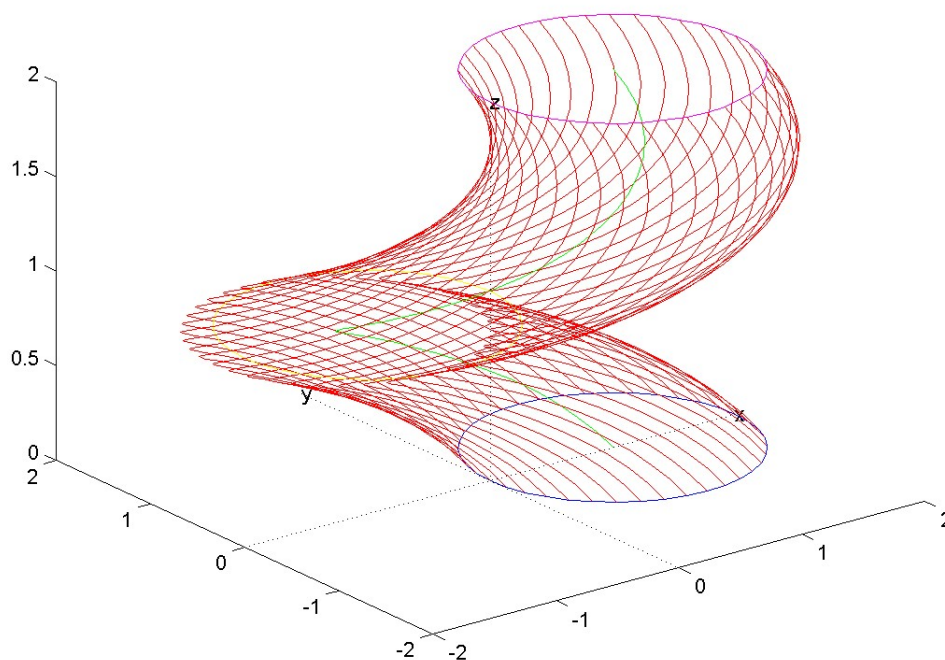
$$(x - R \cos t)^2 + (y - R \sin t)^2 = R^2.$$



Ze třetí rovnice však můžeme přímo vypočítat $t = 2\pi z/h$, a tak po dosazení snadno vychází obecná rovnice σ

$$\left(x - R \cos \frac{2\pi z}{h}\right)^2 + \left(y - R \sin \frac{2\pi z}{h}\right)^2 = r^2.$$

Na obr. 25 je zvoleno $R = r = h = 1$; šroubovice κ je vyznačena zeleně, řídicí kružnice $\tilde{\kappa}$ (v zadané počáteční poloze) modře, její průběžná poloha po posunutí o půl závitu žlutě, a její koncová poloha při pohybu o jeden závit fialově; vybrané křivky na σ pro pevně zvolené t jsou dokresleny červeně.

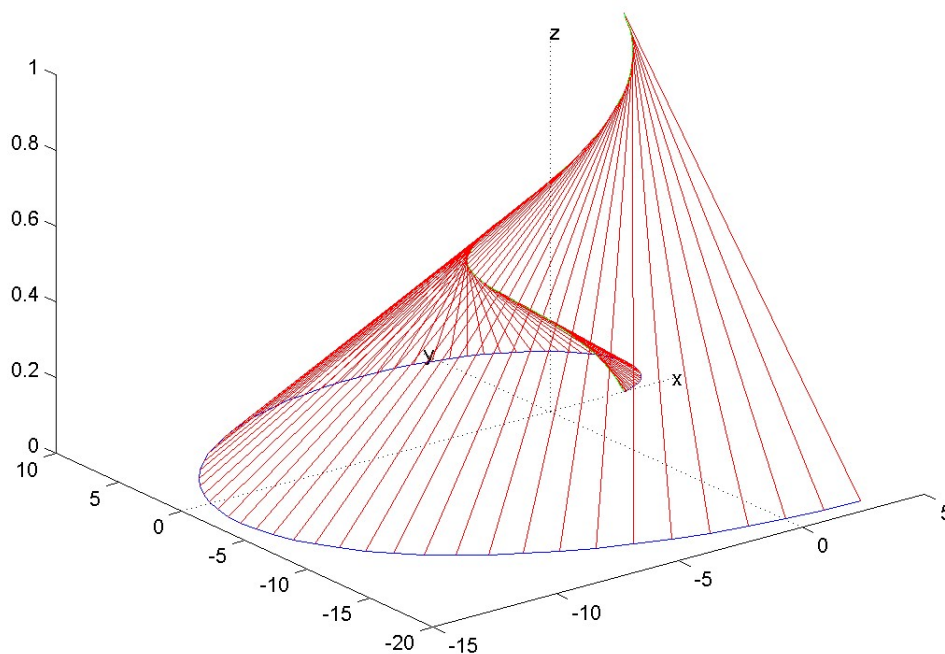


Obr. 25: Plocha vinutého sloupku

Poslední příklad 9.1 poslouží mj. jako propagace poznatku, že ani klasická geometrie se neobejde bez znalostí diferenciálního počtu, jimž jsme se dosud snažili programově vyhýbat; v této souvislosti se pak vedle analytické geometrie, deskriptivní geometrie apod. hovoří o tzv. diferenciální geometrii. Zde ovšem vystačíme s následujícím jednoduchým poznatkem: tečna ke křivce γ , která je popsána parametrickými rovnicemi (5), má směrový vektor $(\dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t), \dot{\chi}(t))$, v němž tečka nad jednotlivými symboly zastupuje derivaci podle jediné reálné proměnné t .

Příklad 9.2: Sestavte parametrické rovnice rozvinutelné šroubové plochy σ , která je vytvářena tečnami ke šroubovici κ z příkladu 9.1. Zapište rovněž parametrické rovnice křivky γ , jež je průnikem σ s půdorysnou.





Obr. 26: Rozvinutelná šroubová plocha

Derivováním pravých stran rovnic (52) podle t dostaneme směrový vektor libovolné tvořící přímky plochy σ ve tvaru $(-R \sin t, R \cos t, h/(2\pi))$. Parametrické rovnice σ tedy jsou

$$x = R(\cos t - s \sin t), \quad y = R(\sin t + s \cos t), \quad z = \frac{h}{2\pi}(t + s), \quad (53)$$

kde $0 \leq t \leq 2\pi$ a $t \in \mathcal{R}$. Pokud bychom měli ambice sestavit i obecnou rovnici σ ze třetí rovnice bychom snadno vypočetli $s = 2\pi z/h - t$, následující pokus o vyloučení t z některé ze zbylých rovnic by však vedl k nelineární rovnici pro t ; takové rovnice se obvykle řeší (je-li to nezbytné) metodami numerické matematiky, kterými se v tomto studijním textu zabývat nemůžeme. Parametrické rovnice γ můžeme nicméně odvodit přímo z (53). Položíme-li totiž $z = 0$ ve třetí rovnici, obdržíme $s = -t$, což po dosazení do prvních dvou rovnic dává okamžitě hledané rovnice γ

$$x = R(\cos t + t \sin t), \quad y = R(\sin t - t \cos t), \quad z = 0.$$

Pokud nás zajímá jen část plochy σ mezi κ a γ , omezme se na $-t \leq s \leq 0$. Na obr. 26 je zvoleno (stejně jako v příkladu 9.1) $R = h = 1$; šroubovice κ je

vyznačena zeleně, vybrané přímky plochy σ jsou znázorněny červeně, křivka γ je vyznačena modře.

V tomto studijním textu jsme se stihli seznámit se základy analytické geometrie křivek a ploch, již je jinak v kurzu matematiky věnováno jen málo času. Jakkoliv po matematické stránce šlo jen o použití maticové a vektorové algebry a základů analytické geometrie ve dvou- a třírozměrném euklidovském prostoru, jsou tyto poznatky potřebné na mnoha místech dalšího studia na FAST – namátkou v integrálním počtu funkcí více proměnných, potřebném téměř všude ve fyzice i v technických vědách, v deskriptivní geometrii, ve stavební mechanice při popisu skořepin, v pozemním stavitelství při navrhování schodišť či střech apod. Snad přehled o této problematice v blízké budoucnosti podpoří i tvůrčí přístup mladých inženýrů při navrhování a realizaci stavebních konstrukcí – snad nejen rodinných vil „podnikatelského baroka“ na lesnatých příbrněnských kopcích s dominantními vinutými sloupky a replikami věže štramberského hradu. . . .



Reference

- [1] Chrastinová, V. *Matematika – Operace s vektory a analytická geometrie*, elektronický učební text pro podporu kombinovaného studia, FAST VUT Brno 2004.
- [2] Novotný, J. *Matematika I – Základy lineární algebry*, CERM Brno 2004.
- [3] Rektorys, K. *Přehled užití matematiky*, SNTL Praha 1966.
- [4] Tryhuk, V. , Dlouhý O. *Matematika I – Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné*, CERM Brno 2004.
- [5] Tryhuk, V. , Dlouhý O. *Matematika I – Diferenciální počet funkcí více reálných proměnných*, CERM Brno 2004.
- [6] Vala, J. *Matematika – Lineární prostory a operátory*, elektronický učební text pro podporu kombinovaného studia, FAST VUT Brno 2004.

Rejstřík

- anuloid 33
- cykloida 18
- elipsa 20
- elipsoid 43
 - rotační 35
- hyperbola 21
 - rovnoosá 13
- hyperboloid 43
 - jednodílný 37
 - dvoudílný 37
 - rotační 36
- koule 30
- kružnice 7
- křivka 7
 - kvadratická 19
 - rovinná 6
 - prostorová 7
- konoid 49
 - kruhový 49
 - Küpperův 50
 - Plückerův 51
 - šroubový 10
 - štramberské Trúby 58
- kužel 29, 43
 - rotační 24, 39
- kuželosečka 19
- oblouk 52
 - marseillský 54
 - montpellierský 53
- parabola 21
- paraboloid 43
 - rotační 38
 - eliptický 43
 - hyperbolický 17, 43
- přímka 6
 - rovinná 6
 - prostorová 7
- rovina 9
- plocha 10
- Hacarova 60
- kvadratická 46
- přímková 31
- rotační 33
- rozvinutelná 61
- rozvinutelná šroubová 62
- šikmého průchodu 57
- štramberské Trúby 58
- vinutého sloupku 61
- zborcená 61
- spirála 18
 - Archimedova 19
 - logaritmická 7, 19
- šroubovice 8
- transformace souřadnic 12
 - afinní 12, 43
 - posunutím 13
 - otočením 13
- válec 29, 43
 - rotační 29, 39
 - eliptický 44
 - hyperbolický 44
 - parabolický 44