

**Interaktivní sbírka příkladů pro předmět
Matematika IV, Numerické metody**

Josef Dalík, Veronika Chrastinová, Oto Příbyl, Hana Šafářová, Pavel Špaček

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební
Ústav matematiky a deskriptivní geometrie
Žižkova 17, 602 00 Brno
Podpořeno projektem FRVŠ 1505/2012/F1/d

Obsah

1	Jedna rovnice pro jednu reálnou neznámou	2
2	Soustavy lineárních algebraických rovnic	8
2.1	Gaussova eliminační metoda a Gaussova eliminační metoda s částečným výběrem hlavních prvků	8
2.2	Symetrické pozitivně definitní matice, Choleského rozklad, Cho- leského metoda	10
2.3	Číslo podmíněnosti matice	10
2.4	Iterační Jacobiova, Gaussova-Seidelova a relaxační metoda . .	11
3	Systémy nelineárních rovnic	14
4	Aproximace funkce	21
4.1	Lagrangeova a Hermiteova interpolace	22
4.2	Diskrétní metoda nejmenších čtverců	26
5	Počáteční úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice (ODR)	28
6	Řešení okrajové úlohy pro ODR 2. řádu metodou sítí	31
7	Numerická integrace	38
8	Řešení okrajové úlohy pro ODR 2. řádu metodou konečných prvků	44
9	Výsledky řešení příkladů	49
10	Individuální úlohy	80

Úvod

Tato sbírka obsahuje motivační úlohy a především rozsáhlé soubory příkladů, jejichž řešením se studenti mohou blíže seznamovat se základními algoritmy numerické analýzy, tj. s postupy pro přibližné řešení standardních elementárních úloh, které jsou v oblasti technických aplikací matematiky velmi často používány a jsou odvozeny a vysvětleny ve studijní opoře [5] "Numerická analýza". Vytvořením této sbírky se autoři snažili zlepšit podmínky pro výuku předmětu Matematika IV v navazujícím magisterském studijním programu "Stavební inženýrství" na Fakultě stavební Vysokého učení technického v Brně. Sbíрка

- a) poskytne studentům předmětu Matematika IV velký počet příkladů pro procvičení schopnosti řešit jednoduché problémy užitím těchto standardních postupů a pro přípravu na zkoušku,
- b) i při velkém počtu studentů předmětu umožní vedoucím cvičení individuální přístup tím, že zadání příkladů, vyznačených ve sbírce hvězdou, jsou závislá na parametrech, takže každý student obdrží jiné zadání, než ostatní. Metodika pro volbu hodnot těchto parametrů i pro hodnocení studentských řešení je zpracována tak, že od vedoucích cvičení vyžadovala minimální úsilí a
- c) vytváří podmínky pro zadávání úloh, požadujících od studentů nejen „ruční“ výpočet řešení daných úloh, ale i implementace postupu jejich řešení ve formě počítačového programu. Vzhledem k dostupnosti a k předpokládaným znalostem studentů jsme za tímto účelem zvolili tabulkový procesor programového systému MS Excel. Pro ilustraci možností využití tohoto prostředku jsou v kapitole 10 možná zadání úloh, vyžadujících užití tabulkového procesoru Excel.

Na stránkách Ústavu matematiky a deskriptivní geometrie lze najít soubor implementací základních algoritmů v Excelu i odkaz na parametrizované úlohy.

Přejeme studentům, aby jim sbírka pomohla předmět Matematika IV lépe zvládnout a snad i povzbudit jejich zájem o tyto účinné a široce prakticky používané prostředky. Přejeme i učitelům, aby sbírka z výuky předmětu odstranila většinu rutinních činností a přispěla ke zlepšení její kvality.

Autoři

V Brně dne 28. listopadu 2012

1 Jedna rovnice pro jednu reálnou neznámou

Za účelem připomenutí numerických metod pro řešení jedné rovnice pro jednu reálnou neznámou se zabývejme řešením této vzorové úlohy:

Cisterna ve tvaru ležícího válce o poloměru 1 m je zaplněna naftou z jedné čtvrtiny. Určete hloubku h [m] nafty v nádrži z Obr. 1.

Na Obr. 1 je znázorněn příčný průřez nádrží. Odtud je zřejmé, že obsah průřezu, vyplněného naftou je obsah výseče pod úsečkami $\overline{AS}$ a $\overline{SC}$ svírajícími úhel $x = \angle ASC$ o velikosti $\pi \cdot x/(2\pi) = x/2$, zmenšený o obsah trojúhelníka $\overline{ACS}$ o velikosti $(\sin x)/2$. Tedy obsah průřezu, vyplněný naftou a také podíl objemu nafty v cisterně k objemu celé cisterny je

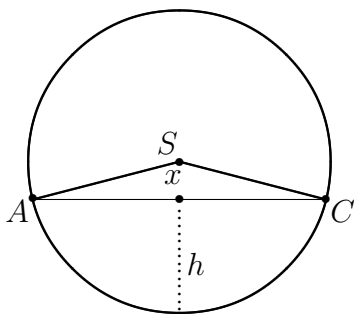
$$\frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} = \frac{x - \sin x}{2}$$

a našim úkolem je najít úhel x takový, že

$$\frac{x - \sin x}{2} = \pi/4.$$

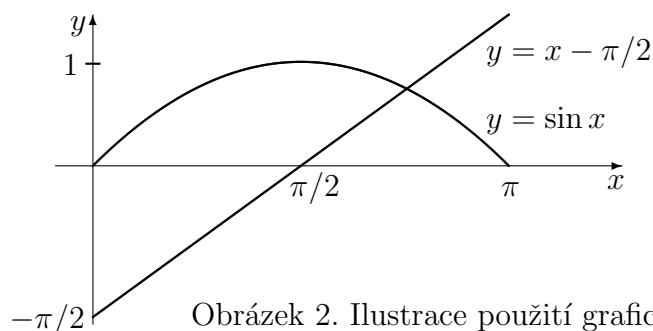
To je ekvivalentní s vyřešením rovnice

$$f(x) \equiv x - \sin x - \pi/2 = 0.$$



Obrázek 1. Příčný řez cisternou

Pohledem na Obr. 1 zjistíme, že po vyřešení této rovnice najdeme výšku h ve tvaru $h = 1 - \cos(x/2)$.



Obrázek 2. Ilustrace použití grafické metody

Protože

$$f(x) = 0 \iff x - \frac{\pi}{2} = \sin x$$

a grafy funkcí $x - \pi/2$ i $\sin x$ lze snadno schematicky nakreslit, viz Obr. 2, můžeme kořen rovnice $f(x) = 0$ odhadnout hodnotou $x = 2$. Vypočtená hodnota $f(2) = -0,480094$ říká, že pro $x = 2$ je $x - \pi/2 < \sin x$ a to znamená, že číslo 2 je menší, než hledaná hodnota úhlu x . Proto jsme spočítali ještě hodnotu $f(2,5) = 0,330732$ pro větší úhel $x = 2,5$. Protože funkce f je spojitá a $f(2) \cdot f(2,5) < 0$, má funkce f v intervalu $(2; 2,5)$ alespoň jeden kořen. Pro ilustraci postupů, které budou procvičovány v níže uvedených cvičeních budeme úlohu „najít $x \in (2; 2,5)$ tak, aby $f(x) = 0$ ” řešit postupně metodou

- a) půlení intervalu
- b) regula falsi
- c) prosté iterace
- d) Newtonovou

a) *Půlení intervalu*: Metoda pro vstupní data

$$a_0 < b_0, \varepsilon > 0 \text{ a } f \in C\langle a_0, b_0 \rangle \text{ s vlastností } f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$$

postupně pro $i = 1, 2, \dots$ počítá střed $s_i = (a_{i-1} + b_{i-1})/2$. Je-li $s_i - a_{i-1} \geq \varepsilon$, určí nový interval

$$\langle a_i, b_i \rangle, \text{ kde } \begin{cases} a_i = a_{i-1}, b_i = s_i, & \text{když } f(a_{i-1}) \cdot f(s_i) < 0 \\ a_i = s_i, b_i = b_{i-1}, & \text{když } f(s_i) \cdot f(b_{i-1}) < 0 \end{cases}.$$

Je-li $s_i - a_{i-1} < \varepsilon$, výpočet skončí s výsledkem $x \doteq s_i$ a s chybou aproximace menší, než $s_i - a_{i-1}$.

Průběh řešení úlohy metodou půlení s chybou, menší než $\varepsilon = 0,01$ je

zaznamenán v Tabulce 1.

i	a_{i-1}	$\operatorname{sgn} f(a_{i-1})$	b_{i-1}	$\operatorname{sgn} f(b_{i-1})$	s_i	$\operatorname{sgn} f(s_i)$
1	2	-	2,5	+	2,25	-
2	2,25	-	2,5	+	2,375	+
3	2,25	-	2,375	+	2,3125	+
4	2,25	-	2,3125	+	2,28125	+
5	2,28125	-	2,3125	+	2,296875	-
6	2,296875	-	2,3125	+	2,304687	-

Tabulka 1

Výsledek: $x \doteq 2,304687 \pm 0,0078125$ a tedy $h \doteq 0,593653$.

b) *Regula falsi*: Tato metoda se od metody půlení liší právě v tom, že bod $s_i \in (a_{i-1}, b_{i-1})$ se počítá předpisem

$$s_i = \frac{a_{i-1}f(b_{i-1}) - b_{i-1}f(a_{i-1})}{f(b_{i-1}) - f(a_{i-1})}$$

a výpočet skončí, jakmile $|f(s_i)| < \varepsilon$. Pak $x \doteq s_i$. Na rozdíl od metody půlení není známý pravdivý odhad chyby vypočtené aproximace.

Průběh řešení úlohy metodou regula falsi s chybou, menší než $\varepsilon = 0,01$ je zaznamenán v Tabulce 2. Podmínka $|f(s_i)| < \varepsilon$ je v tomto příkladu splněna již po dvou krocích.

i	a_{i-1}	$f(a_{i-1})$	b_{i-1}	$f(b_{i-1})$	s_i	$f(s_i)$
1	2	-0,480094	2,5	0,330732	2,296053	-0,023073
2	2,296053	-0,023073	2,5	0,330732	2,309353	-8,84e-4

Tabulka 2

Výsledek: $x \doteq 2,309353$ a tedy $h \doteq 0,595786$.

c) *Prostá iterace*: Rovnice $f(x) = 0$ se nejprve převede na ekvivalentní tvar $x = F(x)$ tak, aby $|F'(x)| \leq \alpha$ pro koeficient kontrakce $\alpha < 1$ a pro všechna x z některého intervalu obsahujícího řešení. Pak se zvolí nultá aproximace x_0 co nejblíže k řešení a počítají se aproximace $x_1, x_2, \dots$ předpisem $x_{i+1} = F(x_i)$ pro $i = 0, 1, \dots$. Výpočet skončí, jakmile $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$ a výsledkem je aproximace x_{i+1} řešení úlohy.

Protože řešení vzorové úlohy leží v intervalu $(2; 2,5)$, převedeme rovnici $f(x) = 0$ na tvar $x = \sin x + \pi/2 \equiv F(x)$. Platí totiž

$$F'(x) = \cos x \quad \text{a} \quad |\cos x| < 0,801144 < 1 \quad \text{pro} \quad x \in (2; 2,5).$$

úlohu tedy řešíme metodou prosté iterace s chybou, menší než $\varepsilon = 0,01$ tak, že za nultou aproximaci zvolíme například střed intervalu $x_0 = 2,25$ a pro $i = 0, 1, \dots$ počítáme $x_{i+1} = \sin x_i + \pi/2$. Pak položíme $x \doteq x_{i+1}$, jakmile $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$. Vypočtené aproximace x_i jsou zaznamenány ve druhém sloupci Tabulky 3. Požadované přesnosti bylo dosaženo po 7 krocích.

i	x_i	x_i^S
0	2,25	2,25
1	2,34887	2,34887
2	2,28306	2,28306
3	2,32768	2,30936
4	2,29778	2,31023
5	2,31798	2,30965
6	2,30440	
7	2,31356	

Tabulka 3

Výsledkem je aproximace řešení 2,31356 a tedy hloubka $h \doteq 0,597711$. Protože v tomto případě nelze koeficient kontrakce α na intervalu $\langle 2; 2,5 \rangle$ volit menší, než 0,801144, je konvergence vypočtené iterační posloupnosti pomalá.

Konvergenci iterační posloupnosti lze zrychlit *Steffensenovou metodou*: Pro danou nultou aproximaci x_0^S se spočítá $x_1^S = F(x_0^S)$, $x_2^S = F(x_1^S)$,

$$x_3^S = x_2^S - \frac{(x_2^S - x_1^S)^2}{x_2^S - 2x_1^S + x_0^S}, \quad x_4^S = F(x_3^S), \quad x_5^S = F(x_4^S)$$

a každá další trojice $x_{3i}^S, x_{3i+1}^S, x_{3i+2}^S$ se počítá stejným postupem. Viz [5], odst. 4.2, Poznámka 1.

Prvky x_i^S rychleji konvergující posloupnosti, získané Steffensenovou metodou jsou uvedeny ve třetím sloupci Tabulky 3. Pro dosažení přesnosti 0,01 stačilo 5 kroků Steffensenovy metody. Výsledek je $x \doteq 2,30965$ a $h \doteq 0,596188$.

d) *Newtonova metoda* pro danou nultou aproximaci x_0 počítá aproximace

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad \text{pro } i = 0, 1, \dots$$

V Tabulce 4 jsou uvedeny iterace pro řešení vzorové úlohy s chybou, menší než $\varepsilon = 1e-6$ pro počáteční iteraci $x_0 = 2,25$.

i	x_i
0	2,25
1	2,3107242
2	2,3098816
3	2,3098815
4	2,3098815

Tabulka 4

Tato přesná hodnota vznikne po 41 krocích metody prosté iterace a po 9 krocích Steffensenovy metody. Tedy úhel $x = 2,3098815$ a výška $h = 0,5960272$.

Příklady k procvičení

Rovnice $f(x) = 0$ pro funkce uvedené v příkladech 1 - 5 řešte metodou půlení a metodou regula falsi vždy s chybou, menší než dané číslo $\varepsilon > 0$. Interval, v němž leží řešení rovnice najděte grafickou metodou.

1. $f(x) = (x - 1) \cdot \operatorname{arctg} x - 1$, $\varepsilon = 1\text{e-}2$, určete všechny kořeny.
- *2. $f(x) = \sin x - 0,2(x - 1)^2 + 1$, $\varepsilon = 1\text{e-}2$, určete všechny kořeny.
3. $f(x) = x^4 + x^2 - 6x + 3$, $\varepsilon = 5\text{e-}3$, určete všechny kořeny.
4. $f(x) = e^x - 2x - 2$, $\varepsilon = 5\text{e-}3$, určete všechny kořeny.
5. $f(x) = \log x - 2x + 7$, určete interval, v němž leží největší kořen, potom počet kroků metody půlení, které poskytnou aproximaci s chybou, menší než $\varepsilon = 1\text{e-}3$ a nakonec výpočet proveďte.

Rovnice $f(x) = 0$ pro funkce v příkladech 6 až 18 řešte metodou prosté iterace s chybou, menší než dané číslo ε . Intervaly, v nichž kořeny leží najděte grafickou metodou a vždy nejprve ověřte, zda na nich je splněna podmínka $|F'(x)| \leq \alpha < 1$.

6. $f(x) = 1 - x \cdot \ln x$, $\varepsilon = 1\text{e-}2$, všechny kořeny.
- *7. $f(x) = 3 \ln x - x + 4$, $\varepsilon = 1\text{e-}3$, všechny kořeny.
8. $f(x) = e^x - x/2 - 2$, $\varepsilon = 1\text{e-}4$, všechny kořeny.
9. $f(x) = 2,2x - 2^x$, $\varepsilon = 1\text{e-}3$, všechny kořeny.
10. $f(x) = 5x - 8 \ln x - 8$, $\varepsilon = 1\text{e-}3$, největší kořen.
11. $f(x) = x - \sin x - 0,25$, $\varepsilon = 1\text{e-}5$, všechny kořeny.
12. $f(x) = x^3 - x - 5$, $\varepsilon = 1\text{e-}3$, všechny kořeny.
13. $f(x) = x - \ln(x + 2)$, $\varepsilon = 1\text{e-}4$, kladný kořen.
14. $f(x) = \arccos x - \sqrt{x + 1}$, $\varepsilon = 1\text{e-}3$, všechny kořeny.

15. $f(x) = (x^2 + 1) \ln x - 1$, $\varepsilon = 1\text{e-}3$, všechny kořeny.

16. $f(x) = \ln x + x/24 - 1$, $\varepsilon = 1\text{e-}4$, všechny kořeny.

17. $f(x) = x^2 - \operatorname{arctg} x - 1$, $\varepsilon = 1\text{e-}3$, všechny kořeny.

18. $f(x) = \operatorname{arctg} x + 2x - 1$, $\varepsilon = 1\text{e-}4$, všechny kořeny.

Rovnice v příkladech 19 až 25 řešte Newtonovou metodou s chybou, menší než dané číslo ε . Co nejpřesnější nultou aproximaci kořene najděte grafickou metodou.

19. $\operatorname{arctg} x - 0.4x - 0,2 = 0$, $\varepsilon = 1\text{e-}5$, největší kořen.

*20. $e^{-x} + x^2 - 4 = 0$, $\varepsilon = 1\text{e-}6$, největší kořen.

21. $x^2 - \operatorname{arctg} x = 0$, $\varepsilon = 1\text{e-}3$, největší kořen.

22. $2x - \log x - 7 = 0$, $\varepsilon = 1\text{e-}5$, největší kořen.

23. $x^3 - 3x^2 - 4x - 10 = 0$, $\varepsilon = 1\text{e-}6$, kořen z intervalu $(4,2; 4,6)$.

*24. $x^3 - x - 5 = 0$, $\varepsilon = 1\text{e-}3$, všechny kořeny.

25. $10 \sin x - \ln x = 0$, $\varepsilon = 1\text{e-}6$, kořen z intervalu $(3; 3,1)$.

Rovnice v příkladech 26 až 29 řešte Newtonovou metodou s chybou, menší než dané číslo ε . Pro každý kořen najděte interval, v němž jsou splněny Fourierovy podmínky (viz [5], odst. 4.3.4) a zvolte aproximaci x_0 tak, aby konvergence metody byla zaručena.

26. $x - \sin x - 0,25 = 0$, $\varepsilon = 1\text{e-}5$, všechny kořeny.

27. $x^2 - 1 - e^x = 0$, $\varepsilon = 1\text{e-}6$, všechny kořeny.

28. $3 \ln x - x + 4 = 0$, $\varepsilon = 1\text{e-}4$, největší kladný kořen.

29. $e^x - x - 10 = 0$, $\varepsilon = 1\text{e-}6$, největší kořen.

2 Soustavy lineárních algebraických rovnic

Většina úloh pro přibližné řešení „matematických modelů“ vede na řešení soustav lineárních algebraických rovnic. Například v této sbírce je řešení soustav lineárních rovnic součástí řešení úloh z kapitol 3, 4, 6 a 8.

Příklady k procvičení

2.1 Gaussova eliminační metoda a Gaussova eliminační metoda s částečným výběrem hlavních prvků

1. Ukažte, že systém rovnic $Ax = b$ v případě a) nemá řešení a v případě b) má nekonečně mnoho řešení. Popište všechna řešení tohoto systému. Formulujte obecné podmínky, za nichž systém n rovnic pro n neznámých $Ax = b$ má jediné řešení, má nekonečně mnoho řešení a nemá žádné řešení.

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2 \end{array} & \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{array} \\ a) & b) \end{array}$$

2. Ukažte, že systém rovnic

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 - 3x_3 & = & -1 \end{array}$$

není řešitelný Gaussovou eliminační metodou a je řešitelný Gaussovou eliminační metodou s částečným výběrem hlavních prvků. Formulujte obecné podmínky, za nichž je daný systém n rovnic pro n neznámých řešitelný a) Gaussovou eliminační metodou a b) Gaussovou eliminační metodou s částečným výběrem hlavních prvků.

*3. Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcl} 0,3x_1 + 1,2x_2 + 20,1x_3 & = & 12,7 \\ 1,1x_1 + 5,1x_2 + 93,1x_3 & = & -0,4 \\ -4,6x_1 - 7,2x_2 + 0,1x_3 & = & 5,9 \end{array}$$

a sestavte LU -rozklad její matice. Zaokrouhľujte na 4 desetinná místa.

4. Systémy rovnic a) - d) řešte Gaussovou eliminační metodou s částečným výběrem hlavních prvků. Zaokrouhľujte postupně na 1, 5, 4 a 6 desetinných míst.

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 15 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 = -21 \end{array} & \begin{array}{l} -x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 29 \\ -4x_1 - 4x_2 + 15x_3 = 33 \\ 33x_1 - 3x_2 - x_3 = 24 \end{array} \\ a) & b) \\ \begin{array}{l} -x_1 + 3x_2 + 2x_4 = -1 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_2 + x_3 - 2x_4 = -4 \end{array} & \begin{array}{l} 1,4159x - 2,6535y - 8,9793z = -35,4738 \\ -2,3846x + 2,6435y - 8,3279z = 3,7145 \\ 5,0288x - 4,1971y - 6,92399z = -49,9517 \end{array} \\ c) & d) \end{array}$$

5. Systémy rovnic a) - d) řešte Gaussovou eliminační metodou i Gaussovou eliminační metodou s částečným výběrem hlavních prvků. Sestavte LU -rozklad matice každé soustavy a zaokrouhľujte na 4 desetinná místa.

$$\begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 & \\ a) \quad 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11 & b) \quad 0,00001x_1 + x_2 = 1 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24 & x_1 + x_2 = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x_1 + 0,25x_2 = 1,25 & 2,175x - 1,006y - 0,032z = 1,204 \\ c) \quad 3,96x_1 + 1,01x_2 = 5,03 & d) \quad -1,006x + 2,212y - 1,048z = 0,432 \\ & -0,032x - 1,048y + 2,126z = 5,296 \end{array}$$

6. Pro matici $A = \begin{bmatrix} 3,1 & 1,3 & 2,7 \\ 1,1 & 3,2 & 1,8 \\ 2,0 & 1,6 & 3,3 \end{bmatrix}$ a vektory $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$ řešte systémy rovnic $Ax = b$ a $Ay = c$ Gaussovou eliminací tak, že přímý chod budete počítat jednou s oběma pravými stranami současně.

7. Jordanovou metodou najděte matice inverzní k níže uvedeným maticím a) - e). Zaokrouhľujte na 3 desetinná místa.

$$\begin{array}{lll} a) \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} & b) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1,2 & 1,3 \\ 1,2 & 1,3 & 1,4 \\ 1,3 & 1,4 & 1,5 \end{bmatrix} & c) \quad \begin{bmatrix} 2,7 & 0 & -1,4 \\ 0 & 3,5 & 2,1 \\ -1,4 & 2,1 & 4,0 \end{bmatrix} \\ d) \quad \begin{bmatrix} 2,0 & -1,3 & 0 & 0 \\ -1,3 & 2,0 & -1,7 & 0 \\ 0 & -1,7 & 2,0 & -1,0 \\ 0 & 0 & -1,0 & 2,0 \end{bmatrix} & e) \quad \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.2 Symetrické pozitivně definitní matice, Choleského rozklad, Choleského metoda

*1. Ověřte že matice a) - i) jsou symetrické pozitivně definitní a najděte jejich Choleského rozklady.

$$\begin{array}{lll} a) \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} & b) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} & c) \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ d) \quad \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} & e) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} & f) \quad \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$g) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad h) \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 10 & 5 & 0 \\ 10 & 5 & 32,5 & 20 \\ 5 & 0 & 20 & 65 \end{bmatrix} \quad i) \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 5 \\ 10 & 5 & 32,5 \end{bmatrix}$$

2. Ověřte že matice systémů rovnic a) - d) jsou symetrické pozitivně definitní a tyto systémy vyřešte Choleského metodou.

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 = 3 & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ a) \quad x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11 & b) \quad x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + 14x_3 = 20 & x_1 + 5x_2 + 14x_3 = 8 \\ 5x_1 + 3x_3 = -5 & 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ c) \quad 2x_2 - x_3 = 4 & d) \quad x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -5 & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3 \end{array}$$

3. Ověřte, že matice $A^T A$ je symetrická pozitivně definitní pro každou regulární matici A .

2.3 Číslo podmíněnosti matice

1. Definujte číslo podmíněnosti regulární matice A a uveďte nerovnost, vymezující jeho význam. Určete číslo podmíněnosti matic B a D užitím normy $\|\cdot\|_\infty$, když

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 5 \\ 10 & 5 & 32,5 \end{bmatrix}$$

2. Najděte číslo podmíněnosti matice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ pomocí norem

$\|\cdot\|_\infty$ a $\|\cdot\|_1$.

3. V případě a) i b) ověřte, že $B = A^{-1}$ a určete číslo podmíněnosti matice A užitím normy $\|\cdot\|_\infty$ a matice B užitím $\|\cdot\|_1$.

$$\begin{array}{ll} a) \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0,8 & -2 \\ -8 & 0,4 & -5 \\ 2 & 0,4 & 6 \end{bmatrix}, & A = \begin{bmatrix} 11/140 & -1/10 & -2/35 \\ 19/28 & 1/2 & 9/14 \\ -1/14 & 0 & 1/7 \end{bmatrix} \\ b) \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -10 & 10/3 \\ -8 & 27,5 & -10 \\ 4 & -15 & 20/3 \end{bmatrix}, & A = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,25 \\ 0,4 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 & 0,9 \end{bmatrix} \end{array}$$

*4. Pro matici $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1,01 & 2 \end{bmatrix}$ vypočtete číslo podmíněnosti užitím normy $\|\cdot\|_\infty$ i $\|\cdot\|_1$ a pro vektory $b = \begin{bmatrix} 1,24 \\ 2,47 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 2,5 \end{bmatrix}$ řešte systémy rovnic $Ax^{(1)} = b$, $Ax^{(2)} = c$.

2.4 Iterační Jacobiova, Gaussova-Seidelova a relaxační metoda

- $$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= -6,5 \\ 10x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 1,5 \\ x_1 + 12x_2 - 10x_3 &= -2,5 \end{aligned}$$
1. Systém rovnic
 - a) vyřešte přímou metodou.
 - b) Po modifikaci systému vhodnou změnou pořadí rovnic zdůvodněte, že řešení Jacobiovou i Gaussovou-Seidelovou metodou konvergují.
 - c) Položte $x^{(0)} = [0, 0, 0]^\top$ a vypočtete iterace $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ řešení modifikace z b) Jacobiovou i Gaussovou-Seidelovou metodou.

2. Příklad 1 vyřešte i pro tyto systémy rovnic a), b):

$$\begin{array}{ll} 3x_1 + 10x_2 - 5x_3 = 8 & 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 = -0,75 \\ a) \quad 20x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30 & b) \quad 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 13,25 \\ x_1 - 1x_2 + 4x_3 = 4 & -8x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -7,75 \end{array}$$

3. Ověřte, že řešení systému

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Jacobiovou i Gaussovou-Seidelovou metodou konverguje. Soustavu potom řešte pro počáteční iteraci $x^{(0)} = [-0,4; 0; 0]^\top$ výpočtem

- a) pěti iterací Jacobiovou metodou a
- b) tří iterací Gaussovou-Seidelovou metodou. Určete normu $\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty$. Zaokrouhľujte na 4 desetinná místa.

4. Gaussovou-Seidelovou metodou řešte následující soustavu rovnic s chybou, menší než $\varepsilon = 0,01$. Zvolte $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^\top$ a zaokrouhľujte na 3

desetinná místa.

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

5. Rozhodněte, zda řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Gaussovou-Seidelovou metodou konverguje. Pro $x^{(0)} = [0, 0, 0]^\top$ vypočtete iterace $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ a normu $\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty$. Zaokrouhľte na 4 desetinná místa.

6. Soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 10x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 20x_3 - x_4 &= -10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 20x_4 &= 15 \end{aligned}$$

řešte s nultou aproximací $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^\top$

a) Jacobiovou metodou. Najděte řešení s chybou, menší než $\varepsilon = 0,01$.

b) Gaussovou-Seidelovou metodou. Spočítejte iteraci $x^{(3)}$.

7. Výpočtem první až čtvrté aproximace řešení systému rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Jacobiovou i Gaussovou-Seidelovou metodou pro nultou aproximaci $x^{(0)} = [0, 0, 0]^\top$ ilustруйте skutečnost, že Jacobiova metoda konverguje a Gaussova-Seidelova metoda diverguje. Užitím řešení Př. 3 z odstavce 2.2 změňte daný systém rovnic tak, aby Gaussova-Seidelova metoda konvergovala a tuto konvergenci opět ilustруйте výpočtem první až čtvrté iterace pro $x^{(0)} = [0, 0, 0]^\top$. Zaokrouhľte na 4 desetinná místa.

8. Pro matici

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{a vektor } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

řešte soustavu rovnic $Ax = b$ Jacobiovou a Gaussovou-Seidelovou metodou s chybou, menší než 0,02. Položte vždy $x^{(0)} = [0,25; 0,3; 0,6; 0]^\top$.

9. Soustavu lineárních rovnic $Ax = b$ s maticí

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & -0,5 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0,5 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{a vektorem } b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

řešte Jacobiovou a Gaussovou-Seidelovou metodou s chybou, menší než 0,05. Položte $x^{(0)} = [1; 0,25; 0; -0,5]^\top$ a zaokrouhľujte na 3 desetinná místa.

10. Soustavu lineárních rovnic $Ax = b$ s maticí

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0,5 \\ 0,5 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0,5 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{a vektorem } b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

řešte Jacobiovou a Gaussovou-Seidelovou metodou s chybou, menší než 0,05. Položte $x^{(0)} = [1; 0; 1,5; 0,5]^\top$ a zaokrouhľujte na 3 desetinná místa.

11. Soustavu lineárních rovnic $Ax = b$ s maticí

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{a vektorem } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

řešte Jacobiovou, Gaussovou-Seidelovou a relaxační Gaussovou-Seidelovou metodou s parametrem $\omega = 1,08$ s chybou, menší než 0,01. Položte vždy $x^{(0)} = [0, 0, 0]^\top$ a zaokrouhľujte na 4 desetinná místa.

3 Systémy nelineárních rovnic

Zabývejme se úlohou najít tlak, nutný ke vnoření velkých hmotných objektů do dané hloubky d měkké homogenní zeminy, podložené tvrdým podloží.

Za těchto podmínek je velikost tlaku p , nutného ke vnoření kruhové desky o poloměru r do hloubky d dána vztahem

$$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r,$$

kde $k_1, k_2 > 0$, k_3 jsou konstanty, které závisí na hloubce vnoření d a na hustotě měkké zeminy, ale nezávisí na poloměru základny r .

Abychom určili konstanty k_1, k_2, k_3 , provedeme experiment, při němž kruhové desky s malými poloměry r_1, r_2, r_3 vnoříme do hloubky d a změříme příslušné tlaky $p_1 = p_1(r_1)$, $p_2 = p_2(r_2)$, $p_3 = p_3(r_3)$. Dostaneme tak rovnice

$$\begin{aligned} p_1 &= k_1 e^{k_2 r_1} + k_3 r_1, \\ p_2 &= k_1 e^{k_2 r_2} + k_3 r_2, \\ p_3 &= k_1 e^{k_2 r_3} + k_3 r_3. \end{aligned}$$

pro neznámé k_1, k_2, k_3 . Protože tyto hodnoty obecně nelze spočítat přesně, používají se přibližné iterační metody, které jsou zobecněním metody prosté iterace a metody Newtonovy pro jednu nelineární rovnici s jednou neznámou na systémy obecně n nelineárních rovnic s n neznámými. V této úloze je $n = 3$. Ve všech ostatních příkladech této kapitoly je $n = 2$. Uvažme konkrétní případ naší úlohy:

Najděte hodnoty k_1, k_2, k_3 , jestliže se do hloubky 0,3 m měkké zeminy vnoří kruhová deska o poloměru 0,025 m při tlaku 68,948 kPa, o poloměru 0,050 m při tlaku 137,895 kPa a o poloměru 0,075 m při tlaku 206,843 kPa. Předpokládáme, že měkká zemina sahá do hloubky 1 m.

V tomto případě má výsledný systém nelineárních rovnic tvar

$$\begin{aligned} 68,948 &= k_1 e^{0,025 k_2} + 0,025 k_3, \\ 137,895 &= k_1 e^{0,050 k_2} + 0,050 k_3, \\ 206,843 &= k_1 e^{0,075 k_2} + 0,075 k_3, \end{aligned}$$

hloubka podloží je 1 m, $k_1 \in \mathbb{R}$, $k_2 > 0$, $k_3 \in \mathbb{R}$. Jeho přibližným řešením jsou $k_1 = 1,618e-3$, $k_2 = 19,248473$, $k_3 = 2757,815279$, a tedy tlak p , nutný ke vnoření kruhové plochy o poloměru r do hloubky 0,3 m měkké zeminy je

$$p = 0,001678 e^{19,248473 r} + 2757,815279 r.$$

V níže uvedeném příkladu ilustrujeme použití metody prosté iterace a metody Newtonovy pro řešení systémů nelineárních rovnic.

Grafickou metodou určete počet kořenů systému rovnic

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &\equiv x^2 - x + y^2 = 0 \\ f_2(x, y) &\equiv x^2 - y^2 - y = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

a nulovou aproximaci $[x^{(0)}, y^{(0)}]$ kořene, ležícího uvnitř 1. kvadrantu. Tuto aproximaci zpřesněte třemi kroky metody prosté iterace a dále Newtonovou metodou tak, aby chyba výsledné aproximace byla menší, než $\varepsilon = 5e-6$. Užijte normu $\|\cdot\|_\infty$.

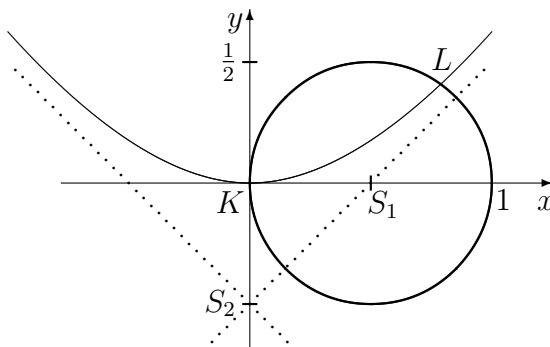
a) *Grafická metoda:* Doplněním $x^2 - x$ v první rovnici na úplný čtverec získáme

$$x^2 - x + y^2 = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4},$$

což je rovnice kružnice se středem $S_1 = [\frac{1}{2}, 0]$ a poloměrem $\frac{1}{2}$. Analogicky je

$$x^2 - y^2 - y = 0 \iff x^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$$

rovnice hyperboly se středem $S_2 = [0, -\frac{1}{2}]$ a průsečíky s osami v bodech $[0, 0]$, $[0, -1]$. Řešením soustavy rovnic jsou všechny průsečíky těchto kuželoseček. Na Obr. 3 jsou znázorněny kružnice, horní větev hyperboly a osy hyperboly.



Obrázek 3. Ilustrace grafické metody

Vidíme, že systém rovnic má kořeny K, L , kde zřejmě $K = [0, 0]$. Za nulovou aproximaci kořene L zvolíme bod $[0,7; 0,4]$.

b) *Metoda prosté iterace:* Daný systém rovnic převedeme na ekvivalentní systém tvaru $x = F_1(x, y)$, $y = F_2(x, y)$ a požadujeme, aby vektorová funkce $F = (F_1, F_2)$ byla v okolí kořene $L \doteq [0,7; 0,4]$ kontrakcí. F vyberme takto:

$$x^2 - x + y^2 = 0 \implies x = \pm\sqrt{x - y^2} \implies F_1(x, y) = \sqrt{x - y^2},$$

$$x^2 - y^2 - y = 0 \implies y = \frac{1 \pm \sqrt{1+4x^2}}{-2} \implies F_2(x, y) = \frac{1 - \sqrt{1+4x^2}}{-2}.$$

Namísto $\pm$ byla znaménka zvolena tak, aby $F_1(x, y) > 0$ i $F_2(x, y) > 0$. Pak

$$F'(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x-y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{x-y^2}} \\ \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Odtud však plyne

$$\|F'(0,7;0,4)\|_\infty \doteq \left\| \begin{bmatrix} 0,68 & 0,54 \\ 0,81 & 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 1,22 \not< 1,$$

takže F není kontrakcí v žádném okolí bodu $[0,7;0,4]$ a předpokládáme, že F není kontrakcí ani v žádném okolí kořene L . Kontrakci F najdeme tímto umělým způsobem: K první rovnici z (1) přičteme rovnici druhou s výsledkem

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - y &= 0, \\ x^2 - y^2 - y &= 0 \end{aligned}$$

a potom

$$2x^2 - x - y = 0 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8y}}{4} \implies F_1(x, y) = \frac{1 + \sqrt{1+8y}}{4},$$

$$x^2 - y^2 - y = 0 \implies y = \frac{1 \pm \sqrt{1+4x^2}}{-2} \implies F_2(x, y) = \frac{1 - \sqrt{1+4x^2}}{-2}.$$

Odtud

$$F'(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1+8y}} \\ \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}} & 0 \end{bmatrix}$$

a protože $\|F'(0,7;0,4)\|_\infty \doteq \max\{0,49;0,81\} = 0,81 < 1$, je F kontrakce v okolí bodu $[0,7;0,4]$ a předpokládáme, že i v okolí bodu L . Iterační posloupnost je tedy určena předpisem $x^{(0)} = 0,7$, $y^{(0)} = 0,4$ a

$$x^{(i+1)} = \frac{1 + \sqrt{1+8y^{(i)}}}{4}, \quad y^{(i+1)} = \frac{1 - \sqrt{1+4(x^{(i)})^2}}{-2} \quad \text{pro } i = 0, 1, \dots$$

První 3 takto vypočtené iterace jsou uvedeny v tabulce.

i	0	1	2	3
$x^{(i)}$	0,7	0,762348	0,742561	0,768018
$y^{(i)}$	0,4	0,360233	0,411688	0,395208

c) *Newtonova metoda*: Pro zpřesnění aproximace z kroku b) položíme $x^{(0)} = 0,768018$, $y^{(0)} = 0,395208$. Jacobiova matice levých stran rovnic (1) je

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x & \partial f_1 / \partial y \\ \partial f_2 / \partial x & \partial f_2 / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 1 & 2y \\ 2x & -2y - 1 \end{bmatrix},$$

takže pro $i = 0, 1, \dots$ postupně řešíme systém rovnic

$$\begin{bmatrix} 2x^{(i)} - 1 & 2y^{(i)} \\ x^{(i)} & -2y^{(i)} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{(i)} \\ d_2^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(x^{(i)}, y^{(i)}) \\ -f_2(x^{(i)}, y^{(i)}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

pro neznámé difference $d_1^{(i)}, d_2^{(i)}$ a počítáme $(i+1)$ -tou aproximaci jako součet

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + d_1^{(i)}, y^{(i+1)} = y^{(i)} + d_2^{(i)}.$$

Pro $i = 0$ tedy z (2) vznikne systém rovnic

$$\begin{bmatrix} 0,536036 & 0,790416 \\ 1,536036 & -1,790416 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{(0)} \\ d_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,021977 \\ -0,038454 \end{bmatrix},$$

který má řešení $d_1^{(0)} = 0,004119$, $d_2^{(0)} = 0,025011$ a tedy

$$x^{(1)} = x^{(0)} + d_1^{(0)} = 0,772137, \quad y^{(1)} = y^{(0)} + d_2^{(0)} = 0,420219.$$

Pro $i = 1$ nabude systém (2) tvaru

$$\begin{bmatrix} 0,544273 & 0,840438 \\ 1,544273 & -1,840438 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,000643 \\ 0,000609 \end{bmatrix}$$

a jeho řešení je $d_1^{(1)} = -0,000292$, $d_2^{(1)} = -0,000576$, takže

$$x^{(2)} = x^{(1)} + d_1^{(1)} = 0,771845, \quad y^{(2)} = y^{(1)} + d_2^{(1)} = 0,419644.$$

Pro $i = 2$ má systém rovnic (2) řešení

$$d_1^{(2)} = -2,437\text{e-}7, \quad d_2^{(2)} = -3,383\text{e-}7$$

a tedy při zápisu na 6 desetinných míst je $x^{(3)} = x^{(2)}$, $y^{(3)} = y^{(2)}$. Protože zřejmě $\|x^{(i+1)} - x^{(i)}, y^{(i+1)} - y^{(i)}\|_\infty = \|d^{(i)}\|_\infty$ a

$$\|d^{(0)}\|_\infty = 0,025011 > \varepsilon, \quad \|d^{(1)}\|_\infty = 0,000576 > \varepsilon, \quad \|d^{(2)}\|_\infty = 3,383\text{e-}7 < \varepsilon,$$

je bod $[x^{(2)}, y^{(2)}] = [0,771845; 0,419644]$ hledaná aproximace kořene L .

Příklady k procvičení

1. Grafickou metodou odhadněte počet a přibližnou polohu všech kořenů daného systému nelineárních rovnic $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ a pro vhodně zvolenou nultou aproximaci $[x^{(0)}, y^{(0)}]$ spočítejte kořen užitím Newtonovy metody s přesností $\varepsilon = 0,001$. V průběhu výpočtu zaokrouhľujte na 4 desetinná místa a v každém kroku spočítejte normu $\|[x^{(i+1)}, y^{(i+1)}] - [x^{(i)}, y^{(i)}]\|_\infty$.

- a) $x^2 - y - 0,2 = 0$, $y^2 - x - 0,3 = 0$, pouze kořen v 1. kvadrantu
- b) $x - \frac{1}{y} - 2 = 0$, $(x - 2)^2 + \frac{1}{4}(y + 2)^2 - 1 = 0$, kořen s větší souřadnicí na ose x
- c) $2x + 3y^2 - 2 = 0$, $x^2 - 3y = 0$, kořen v 1. kvadrantu
- *d) $x^2 - 2x - y + 0,5 = 0$, $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$, kořen v 1. kvadrantu
- *e) $xy - y - 1 = 0$, $x^2 - y^2 - 1 = 0$, kořen v 1. kvadrantu
- *f) $x^2 - x - y = 0$, $x^2 - y^2 - 2y = 0$, aproximujte kořen uvnitř 1. kvadrantu, druhý uhádněte.

2. Pro zadanou nultou aproximaci $[x^{(0)}, y^{(0)}]$ určete Newtonovou metodou kořen nelineárního systému $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ s přesností $\varepsilon = 0,01$. Ve vyznačených případech, kdy funkce f, g lze snadno nakreslit, určete také počet a přibližnou polohu všech kořenů systému. Počítejte s přesností na 4 desetinná místa, použijte normu $\|\cdot\|_\infty$.

- a) $3y - 4x^2 + 1 = 0$, $2x - y^2 + 1 = 0$, $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [1,3; 1,8]$, nakreslete, druhý z kořenů určete přímo z obrázku
- b) $xy - x - 1 = 0$, $9(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 - 9 = 0$, $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [1,3; 2]$, nakreslete
- c) $2 \cos(xy) - 1 = 0$, $2 \sin(x + y) - 1 = 0$, $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [2,50; 0,25]$
- d) $2 \cos(xy) - \sin x = 0$, $2x \sin y - 3y \sin x + 1 = 0$, $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [1; 1]$
- e) $4x^2 + y^2 + 2xy - y - 2 = 0$, $2x^2 + y^2 + 3xy - 3 = 0$, $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [0,4; 0,9]$
- f) $2x^3 - y^2 - 1 = 0$, $xy^3 - y - 4 = 0$, $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [1,2; 1,7]$.

3. Užitím Newtonovy metody spočítejte druhou aproximaci $[x^{(2)}, y^{(2)}]$ řešení nelineárního systému $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$ pro zadanou počáteční aproximaci $[x^{(0)}, y^{(0)}]$. V průběhu výpočtu zaokrouhľujte na 6 desetinných míst. V případě jednodušších funkcí f, g určete z obrázku také počet a přibližnou polohu všech kořenů systému.

- a) $2x - e^y + 2 = 0, e^x + y - 1 = 0, [x^{(0)}, y^{(0)}] = [0; 0]$, nakreslete
- b) $e^x - y = 0, x + \sin y = 0, [x^{(0)}, y^{(0)}] = [-0,5; 0,5]$, nakreslete
- c) $\ln x - y + 1 = 0, x - y^2 + 1 = 0, [x^{(0)}, y^{(0)}] = [2; 1,5]$, nakreslete
- d) $x^2 - 4x + y^2 = 0, xy - 1 = 0, [x^{(0)}, y^{(0)}] = [1; 1,5]$, nakreslete
- e) $x^2 - 2y - 2 = 0, xy - 1 = 0, [x^{(0)}, y^{(0)}] = [1,8; 0,5]$, nakreslete
- f) $4(x - 1)^2 + \frac{1}{16}y^2 - 1 = 0, y - \frac{1}{x} - 0,5 = 0, [x^{(0)}, y^{(0)}] = [1,6; 1]$,
nakreslete
- g) $y^2 - x^2 - 1 = 0, (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 1 = 0, [x^{(0)}, y^{(0)}] = [1,2; 1,6]$,
nakreslete
- h) $x^2 - y^2 - 1 = 0, (x - 1)^2 + (y + 1)^2 - 1 = 0, [x^{(0)}, y^{(0)}] = [1,2; 0,2]$,
nakreslete
- i) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} - 1 = 0, y - \cos x = 0, [x^{(0)}, y^{(0)}] = [1,4; 0,2]$, nakreslete
- j) $y - e^{2x} - 1 = 0, x - y^2 + 9 = 0, [x^{(0)}, y^{(0)}] = [-4; 0,8]$, další kořen
pro počáteční aproximaci $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [0,4; 4]$, nakreslete
- k) $x^2 - y^2 + 1 = 0, x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0, [x^{(0)}, y^{(0)}] = [-0,9; 1]$, nakreslete
- l) $x^2 - 2y - 2 = 0, x^3y - 1 = 0, [x^{(0)}, y^{(0)}] = [1,6; 0,5]$, nakreslete
- m) $e^x + xy - 2y + 2,4 = 0, x + y - 1,2 = 0, [x^{(0)}, y^{(0)}] = [-0,4; 1,5]$,
- n) $x + 3 \ln x - y^2 = 0, 2x^2 - xy - 5y + 1 = 0, [x^{(0)}, y^{(0)}] = [0,8; 0,4]$,
- o) $2 \cos x + y^2 - 4x = 0, x^2 + 2xy - 5y = 0, [x^{(0)}, y^{(0)}] = [0,5; 0]$,
- p) $x^2 + 4x - y^2 - 2y - 1 = 0, x^2 + 5y - 4 = 0, [x^{(0)}, y^{(0)}] = [0,5; 0,5]$,
nakreslete
- q) $2x^2 + y^2 - 1 = 0, x^3 + 6x^2y - 1 = 0, [x^{(0)}, y^{(0)}] = [0,7; 0,3]$.

4. Metodou prosté iterace spočítejte aproximaci kořene $[\hat{x}, \hat{y}]$ zadaného nelineárního systému. V průběhu výpočtu zaokrouhľujte na 6 desetinných míst.

- a) Grafickou metodou ověřte, že systém $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $y - x^3 = 0$ má dva kořeny v 1. a 3. kvadrantu symetrické vzhledem k bodu $[0, 0]$. Kořen v 1. kvadrantu aproximujte iterací $[x^{(4)}, y^{(4)}]$ užitím nulté aproximace $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [0,7; 0,5]$. Ověřte konvergenci iterační posloupnosti.
- b) Ukažte, že nelineární systém rovnic $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ ve tvaru

$$y = x^2, \quad \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

lze upravit na iterační tvar

$$x = \frac{2x - x^2 + y}{2} = F_1(x, y), \quad y = \frac{2x - x^2 + 8}{9} + \frac{4y - y^2}{4} = F_2(x, y),$$

aproximaci $[x^{(4)}, y^{(4)}]$ kořene počítejte pro volbu $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [1,4; 2]$. Znázorněte graficky množiny bodů $[x, y]$, splňujících každou z daných rovnic a určete počet a polohu všech kořenů.

- c) Pro zadaný nelineární systém $x^2 - 10x + y^2 + 8 = 0$, $xy^2 + x - 10y + 8 = 0$ najděte ekvivalentní systém $x = F_1(x, y)$, $y = F_2(x, y)$, ukažte, že v okolí bodu $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [0,75; 0,75]$, je funkce $(F_1(x, y), F_2(x, y))$ kontrakce a vypočtete čtvrtou iteraci.
- d) Ukažte, že funkce $(F_1(x, y), F_2(x, y))$, kde

$$F_1(x, y) = 0,2 + 0,1(-xy^2 + 3x), \quad F_2(x, y) = 0,6 + 0,1(-x^2y^3 - 2y)$$

je kontrakcí v okolí bodu $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [0,5; 0,5]$ a spočítejte čtvrtou iteraci $[x^{(4)}, y^{(4)}]$. Dále ověřte, že výše uvedené rovnice kontrakce F tvaru

$$x = 0,2 + 0,1(-xy^2 + 3x), \quad y = 0,6 + 0,1(-x^2y^3 - 2y)$$

jsou ekvivalentní nelineárnímu systému

$$0,1xy^2 + 0,7x - 0,2 = 0, \quad 0,1x^2y^3 + 1,2y - 0,6 = 0.$$

4 Aproximace funkce

Tato kapitola je věnovaná procvičení řešení úlohy aproximace funkce $f(x)$, jejíž hodnoty jsou známy jen v uzlech $x_0, \dots, x_n$ jednoduchou funkcí $F(x)$ *Lagrangeovou interpolací*, kdy funkce $F(x)$ splňuje podmínku

$$F(x_i) = f(x_i) \quad \text{pro } i = 0, \dots, n,$$

Hermiteovou interpolací, kdy

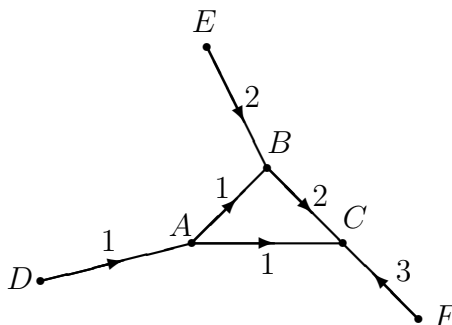
$$F(x_i) = f(x_i) \text{ a také } F'(x_i) = f'(x_i) \text{ pro } i = 0, \dots, n$$

a nakonec *diskrétní metodou nejmenších čtverců*, kdy funkce F minimalizuje hodnotu součtu

$$(F(x_0) - f(x_0))^2 + \dots + (F(x_n) - f(x_n))^2.$$

Níže uvedená řešená úloha naznačuje, že diskrétní metoda nejmenších čtverců, prezentovaná v [5], odstavec 9.3, je použitelná na řešení širší třídy úloh.

Za účelem zjištění nadmořské výšky bodů A , B , C bylo změřeno šest výškových rozdílů, znázorněných na Obr. 4, kde nadmořské výšky bodů D , E , F jsou nulové. Najděte co nejlepší aproximace výšek bodů A , B a C .



Obrázek 4. Naměřené výškové rozdíly

Každý naměřený výškový rozdíl poskytuje jednu lineární rovnici mezi nadmořskými výškami x_A , x_B , x_C bodů A , B , C :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Označíme-li sloupcové vektory matice této soustavy postupně $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ a vektor pravých stran b , pak jsou hodnoty jejich skalárních součinů $\langle a^{(1)}, a^{(1)} \rangle = 3$, $\langle a^{(2)}, a^{(1)} \rangle = -1$, $\langle a^{(3)}, a^{(1)} \rangle = -1$, $\langle b, a^{(1)} \rangle = -1$ atd., takže normální rovnice mají tvar

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

a jejich řešením obdržíme výšky $x_A = 1,25$, $x_B = 1,75$, $x_C = 3$.

Pro stanovení hodnot x_A, x_B, x_C z předchozího příkladu zřejmě stačí provést tři měření; například ta, která přísluší prvním třem uvedeným rovnicím. Je však ověřeno, že větší množství měření a řešení pře určeného systému rovnic metodou nejmenších čtverců poskytuje výsledek zpravidla méně závislý na chybách měření.

4.1 Lagrangeova a Hermiteova interpolace

Příklad 1. Pro níže uvedenou úlohu interpolace a) i b) najděte interpolační polynom $P(x)$ v Lagrangeově i Newtonově tvaru.

a) $P(1) = 4$, $P(3) = 2$.

b) $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$ pro libovolná $x_0 \neq x_1$.

(bez zaokrouhlování)

Příklad 2. V případě a) a b) najděte Lagrangeův i Newtonův interpolační polynom funkce s hodnotami y_i v uzlech x_i z tabulky.

a)

x_i	0	2	3	4
y_i	3	1	5	7

b)

x_i	-1	0	2	3	4
y_i	8	3	1	5	7

(bez zaokrouhlování)

Příklad 3. Najděte Newtonův interpolační polynom funkce $f(x) = \cos x$ v uzlech

a) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$,

b) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$,

c) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$,

d) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

Jaké jsou absolutní chyby aproximací a) - d) v bodě $x = 1,5$?

(4 desetinná místa)

Příklad 4. V případě a) i b) najděte Newtonův interpolační polynom funkce f užitím hodnot $y_i = f(x_i)$ v uzlech x_i z tabulky.

a)

x_i	0	1	2	5
y_i	2	3	12	147

b)

x_i	0	1	1,5	2	5
y_i	2	3	8	12	147

(bez zaokrouhlování)

Příklad 5. Sestrojte Newtonův interpolační polynom funkce $f(x) = \sqrt{x}$ v uzlech $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$ a s jeho pomocí aproximujte hodnotu $\sqrt{115}$. Jaká je absolutní chyba této aproximace?

(4 desetinná místa)

Příklad 6. Najděte Newtonův interpolační polynom $N(x)$ funkce $f(x) = \log x - \frac{x-1}{x}$ v uzlech 4, 8, 10 a pomocí hodnoty $N(5,25)$ aproximujte $\log(5,25)$. Jaká je absolutní chyba této aproximace?

($\log = \log_{10}$, počítejte s přesností na 5 desetinných míst)

Příklad 7. Newtonovým interpolačním polynomem funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v uzlech $x_0 = 4$, $x_1 = 5$, $x_2 = 6$ aproximujte hodnotu $\sqrt[3]{4,8}$ a určete absolutní chybu této aproximace.

(5 desetinných míst)

Příklad 8. Newtonovým interpolačním polynomem funkce $f(x) = \cos(\pi x)$ v uzlech $x_0 = 0$, $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$ aproximujte hodnotu $\cos \frac{\pi}{6}$ a určete absolutní chybu této aproximace.

(6 desetinných míst)

Příklad 9. V případě a) i b) rozhodněte, zda je funkce $s(x)$ kubický splajn případně přirozený kubický splajn.

$$a) \quad s(x) = \begin{cases} 1 - \frac{7}{8}x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{16}x^3, & x \in \langle -1, 0 \rangle, \\ 1 - \frac{7}{8}x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{16}x^3, & x \in \langle 0, 2 \rangle, \\ \frac{9}{2} - \frac{49}{8}x + \frac{45}{16}x^2 - \frac{5}{16}x^3, & x \in \langle 2, 3 \rangle. \end{cases}$$

$$\text{b) } s(x) = \begin{cases} 1 + \frac{23}{15}x + \frac{4}{5}x^2 + \frac{4}{15}x^3, & x \in \langle -2, 0 \rangle, \\ 1 + \frac{23}{15}x + \frac{4}{5}x^2 - \frac{4}{3}x^3, & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ -\frac{7}{5} + \frac{131}{15}x - \frac{32}{5}x^2 + \frac{16}{15}x^3, & x \in \langle 1, 3 \rangle. \end{cases}$$

Příklad 10. Najděte Hermiteův interpolační polynom funkce f , jejíž hodnoty v uzlech interpolace jsou uvedeny v tabulce.

x_i	-1	2
$f(x_i)$	4	-1
$f'(x_i)$	0	3

Ověřte všechny definiční podmínky Hermiteova polynomu. Jaká je přibližná hodnota $f(1)$?

(bez zaokrouhlování)

Příklad 11. Najděte a) Hermiteův interpolační polynom a b) Hermiteův interpolační kubický splajn funkce f v uzlech z tabulky.

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	0	-1	2
$f'(x_i)$	-1	1	4

(bez zaokrouhlování)

Příklad 12. Najděte Hermiteův interpolační kubický splajn pro uzly x_i a hodnoty y_i, y'_i uvedené v tabulce.

x_i	0	1	4
y_i	2	5	1
y'_i	1	-1	2

Ověřte všechny definiční podmínky Hermiteova kubického splajnu.

(6 desetinných míst)

Příklad 13. Funkci f , jejíž hodnoty a první derivace v uzlech $-1, 0, 1$ jsou uvedeny v tabulce aproximujte a) Hermiteovým interpolačním polynomem a b) Hermiteovým interpolačním kubickým splajnem.

x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	-1	0	1
$f'(x_i)$	0	0	0

(bez zaokrouhlování)

Příklad 14. Funkci $f(x) = x + \sin x$ aproximujte a) Hermiteovým interpolačním polynomem a b) Hermiteovým interpolačním kubickým splajnem v uzlech $x_0 = 1,5$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Hodnotami interpolantů a) a b) aproximujte hodnotu $f(2,5)$ a uveďte absolutní chyby těchto aproximací.

(6 desetinných míst)

Příklad 15. Funkci $f(x) = \ln x$ aproximujte a) Hermiteovým interpolačním polynomem a b) Hermiteovým interpolačním kubickým splajnem v uzlech $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ a $x_3 = 4$. Hodnotami interpolantů a) a b) aproximujte hodnotu $f(2,5)$ a uveďte absolutní chyby těchto aproximací.

(4, resp. 6 desetinných míst)

Příklad 16. Hodnotu $e^{0,15}$ aproximujte pomocí a) Newtonova a b) Hermiteova interpolačního polynomu funkce $f(x) = e^x$ v uzlech $x_0 = 0,1$, $x_1 = 0,2$. V obou případech uveďte absolutní chybu aproximace.

(6 desetinných míst)

Příklad 17. Funkci $f(x) = 2^x - x$ aproximujte užitím a) Newtonova interpolačního polynomu, b) Hermiteova interpolačního polynomu a c) Hermiteova interpolačního kubického splajnu v uzlech 1, 2, 4. Jaké jsou absolutní chyby těchto aproximací v bodě $x = 3,5$?

(4 desetinná místa)

Příklad 18. Aproximujte hodnotu $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ Hermiteovým interpolačním polynomem funkce $f(x) = \sin(\pi x)$ v uzlech $x_0 = 0,5$, $x_1 = 0,7$, $x_2 = 1$. Jaká je absolutní chyba této aproximace?

(6 desetinných míst)

4.2 Diskrétní metoda nejmenších čtverců

Příklad 1. Funkci f , jejíž hodnoty v uzlech x_i jsou uvedeny v tabulce, aproximujte kvadratickým polynomem.

x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	1	2	5	7

Vektor chyb aproximace v uzlech z tabulky znázorněte graficky a vypočítejte jeho Euklidovskou normu (tuto normu budeme stručně nazývat *chyba aproximace*).

(2 desetinná místa)

Příklad 2. Funkci $f(x) = e^x$ aproximujte polynomem 1. stupně v uzlech $x_i = -1 + 0,5i$ pro $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Vypočtete chybu aproximace i absolutní chybu aproximace hodnoty $e^{0,25}$.

(5 desetinných míst)

Příklad 3. Aproximujte průměrnou spotřebu auta [l/100 km] v obcích a mimo obce, jestliže při 3 cestách byly zjištěny tyto údaje:

cesta	počet km v obcích	počet km mimo obce	celková spotřeba
1	30	100	8 l
2	90	210	20 l
3	25	150	11 l

(4 desetinná místa)

Příklad 4. V případě a) i b) aproximujte funkci f , jejíž známé hodnoty $y_i = f(x_i)$ jsou uvedeny v tabulce, polynomem ve tvaru $c_0 + c_1 x$.

a)

x_i	1	2	4	8
y_i	-1	3	5	0

b)

x_i	-1	1	3	5	7
y_i	1	3	4	5	6

(6 desetinných míst)

Příklad 5. Funkci f , jejíž hodnoty $y_i = f(x_i)$ v uzlech x_i jsou uvedeny v tabulce, aproximujte kvadratickým polynomem.

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	4	2	3	0	-1	-2	-5

(4 desetinná místa)

Příklad 6. Funkci f , jejíž hodnoty $y_i = f(x_i)$ v uzlech x_i jsou uvedeny v tabulce, aproximujte funkcí ve tvaru

$$a \cdot \frac{1}{x} + b.$$

x_i	-1	1	2	3
y_i	1	3	2	1,7

Vypočtěte chybu aproximace.

(3 desetinná místa)

Příklad 7. Funkci, jejíž naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce, aproximujte funkcí ve tvaru $a + b \cdot e^{-x}$.

x_i	0	0,5	1	1,5
y_i	3,57	2,99	2,62	2,33

(4 desetinná místa)

Příklad 8. Funkci $f(x) = x^2$ aproximujte lineární kombinací funkcí 1 , $\sin x$ a $\cos x$ v uzlech $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ a $x_4 = 2$. Vypočtěte chybu aproximace.

(3 desetinná místa)

Příklad 9. Funkci f , jejíž naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce, aproximujte kvadratickým polynomem f^* .

x_i	-1	0	1	2
y_i	0,9	-0,1	1,2	3,9

Vypočtěte chybu aproximace a porovnejte ji s chybou aproximace funkce $y = x^2$ polynomem f^* v uzlech z tabulky.

(3 desetinná místa)

Příklad 10. Funkci $f(x) = x^2$ aproximujte lineární kombinací funkcí 1 , e^x , e^{-x} v uzlech $x_i = -2 + i$ pro $i = 1, 2, 3, 4$. Vypočtěte chybu aproximace.

(3 desetinná místa)

Příklad 11. Najděte přibližné řešení níže uvedených přeuročených soustav lineárních rovnic a), b), c) metodou nejmenších čtverců a vždy vypočtěte chybu aproximace.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 4y = 11 \\ 7x + 8y = 24 \end{cases} \end{aligned}$$

$$c) \quad \begin{cases} a + b + c + d = 4 \\ a - b + c - d = 1 \\ a - b - c - d = -3 \\ a + b - c - d = 0 \\ a - b + c + d = 2 \end{cases}$$

(počítejte bez zaokrouhlování)

Příklad 12. Funkci $f(x) = |x|$ aproximujte kvadratickým polynomem v uzlech $x_1 = -1,5$, $x_2 = -1$, $x_3 = -0,5$, $x_4 = 0$ a $x_5 = 0,2$. Jaká je chyba aproximace?

(4 desetinná místa)

5 Počáteční úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice (ODR)

Podle Newtonova zákona je rychlost ochlazování tělesa ve studeném prostředí úměrná rozdílu mezi teplotou tělesa a teplotou prostředí. Tedy pro funkce teploty $y(x)$ tělesa a teploty $a(x)$ okolního vzduchu v čase x existuje kladná konstanta K tak, že

$$y'(x) = -K(y(x) - a(x)).$$

Tato rovnice je využívána například v soudním lékařství. Pro ilustraci vyřešíme tuto jednoduchou úlohu:

Najděte dobu δt [hod] od okamžiku vraždy do času, kdy byla naměřena teplota 24°C těla oběti za předpokladu, že tělo se nacházelo v místnosti o konstantní teplotě 21°C .

Předpokládáme, že na začátku časového intervalu $(0, \delta t)$ je teplota těla $y(0) = 37^{\circ}\text{C}$. Použijeme-li v soudním lékařství běžný koeficient $K = 0,22314$, vznikne počáteční úloha

$$y'(x) = -0,22314(y(x) - 21), \quad y(0) = 37,$$

jejíž řešení lze snadno najít metodou separace proměnných ve tvaru

$$y(x) = 21 + 16e^{-0,22314x}.$$

Naším úkolem je najít dobu δt s vlastností $y(\delta t) = 24$, tj.

$$21 + 16e^{-0,22314\delta t} = 24 \iff \delta t = 7,50191106 \text{ hodin.}$$

Tedy doba mezi vraždou a měřením teploty těla je přibližně 7 hodin, 30 minut a 7 sekund.

Znalosti řešení výše uvedené motivační úlohy využijeme pro experimentální porovnání přesnosti těch numerických metod, které budou v této kapitole procvičovány.

Příklad. Řešení počáteční úlohy

$$y'(x) = -0,22314(y(x) - 21) \quad \text{v } (0, 1), \quad y(0) = 37$$

aproximujte **a)** Eulerovou metodou, **b)** modifikací Eulerovy metody (Heunovou metodou), **c)** klasickou čtyřbodovou Rungeovou-Kuttovou metodou, **d)** implicitní Eulerovou metodou, **e)** lichoběžníkovou metodou s krokem $h = 0,25$ a vypočtěte absolutní chyby těchto aproximací v bodě $x_4 = 1$ užitím hodnoty přesného řešení $y(1) = 33,8000$. Zaokrouhľujte na 4 desetinná místa.

Výsledky:

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	37	37	37	37	37
1	0,25	36,1074	36,1323	36,1318	36,1074	36,1317
2	0,50	35,2646	35,3117	35,3108	35,2646	35,3105
3	0,75	34,4688	34,5356	34,5343	34,4688	34,5339
4	1,0	33,7174	33,8016	33,8000	33,7174	33,7994
	$y(1) - y_4$	0,0826	-0,0016	0,0000	0,0826	0,0006

Příklady k procvičení:

Řešení níže uvedených počátečních úloh 1 - 25 aproximujte s krokem $h = 0,25$

- Eulerovou metodou,
- modifikací Eulerovy metody (Heunovou metodou),
- klasickou čtyřbodovou Rungeovou-Kuttovou metodou,
- implicitní Eulerovou metodou,
- lichoběžníkovou metodou.

- $y' = xy^2 \quad \text{v } (0,1), \quad y(0) = 0,1$

2. $y' = x - y$, $v(0,1)$, $y(0) = 0$
3. $y' = x(1 + 2y)$, $v(0,1)$, $y(0) = 2$
4. $y' = \frac{x}{y}$, $v(1,2)$, $y(1) = 2$
5. $y' = y + x^2$, $v(0,1)$, $y(0) = 1$
6. $y' = x^2y$, $v(0,1)$, $y(0) = 2$
7. $y' = \frac{x-y}{x}$, $v(2,3)$, $y(2) = 2$
8. $y' = x + y$, $v(0,1)$, $y(0) = 1$
9. $y' = 2y$, $v(0,1)$, $y(0) = 1$
10. $y' = y^2 \sin(x)$, $v(0,1)$, $y(0) = 1$
11. $y' = y + e^{-x}$, $v(0,1)$, $y(0) = 1$
12. $y' = -y + e^{-x}$, $v(0,1)$, $y(0) = 1$
13. $y' = \sqrt{1 - y^2}$, $v(0,1)$, $y(0) = 0$
14. $y' = \frac{x}{y}$, $v(0,1)$, $y(0) = 1$
15. $y' = x + x^2 + y^2$, $v(0,1)$, $y(0) = 0$
16. $y' = y + 2$, $v(0,1)$, $y(0) = 1$
17. $y' = y - e^x$, $v(0,1)$, $y(0) = 0,1$
18. $y' = xy$, $v(0,1)$, $y(0) = 1$
19. $y' = x^2y^2$, $v(0,1)$, $y(0) = 1$
20. $y' = y - 2\frac{x}{y}$, $v(0,1)$, $y(0) = 1$
21. $y' = y^2 - 3x^2 - 1$, $v(0,1)$, $y(0) = 1$
22. $y' = xy + 1$, $v(0,1)$, $y(0) = 0$
23. $y' = -y\sqrt{x}$, $v(0,1)$, $y(0) = 1$
24. $y' = \frac{1-x+y^2}{1+1,5y+x^2}$, $v(0,1)$, $y(0) = 0$
25. $y' = \frac{2y^3+1}{15y-x+5}$, $v(0,1)$, $y(0) = 0$

6 Řešení okrajové úlohy pro ODR 2. řádu metodou sítí

V této kapitole budeme procvičovat řešení okrajové úlohy pro ODR

$$-a^2 y'' + py' + qy = f \quad \text{na intervalu } (0, l) \quad (1)$$

s Dirichletovou, Neumannovou nebo Newtonovou okrajovou podmínkou v každém z hraničních bodů 0 a l . Hodnota hledané funkce $y(x)$ má nejčastěji význam teploty nebo koncentrace příměsi v bodu x . Pak koeficient

$$\begin{array}{ll} a^2 > 0 & \text{druhé derivace } y'' \text{ je tepelná vodivost nebo difuzivita příměsi,} \\ p(x) & \text{první derivace } y' \text{ je rychlost toku látky,} \\ q(x) \geq 0 & \text{funkce } y \text{ je absorpce příp. reakce,} \\ f(x) & \text{na pravé straně je intenzita zdrojů tepla nebo příměsi.} \end{array}$$

Význam Dirichletovy okrajové podmínky je zřejmý. Význam dalších typů okrajových podmínek je odvozen od skutečnosti, že $-a^2 y'(x)$ udává intenzitu toku tepla nebo příměsi přes bod x v kladném směru osy x . Pak Neumannova okrajová podmínka, kterou lze zapsat ve tvaru

$$a^2 y'(0) = c_0 \quad \text{případně} \quad -a^2 y'(l) = c_l,$$

předepisuje intenzitu toku tepla nebo příměsi přes hraniční bod 0 případně l ven z intervalu $\langle 0, l \rangle$. Newtonova *přestupová* okrajová podmínka

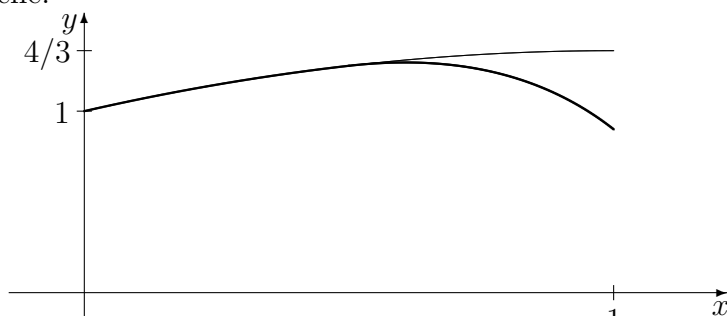
$$a^2 y'(0) = \alpha_0(u(0) - u_{\text{ext}}) \quad \text{případně} \quad -a^2 y'(l) = \alpha_l(u(l) - u_{\text{ext}})$$

říká, že intenzita toku tepla nebo příměsi ven z intervalu $\langle 0, l \rangle$ je úměrná rozdílu teploty nebo koncentrace příměsi v hraničním bodu intervalu a teploty nebo koncentrace příměsi u_{ext} vně intervalu. Koeficient úměrnosti $\alpha_0 > 0$ případně $\alpha_l > 0$ charakterizuje tepelnou „prostupnost“ rozhraní mezi intervalem a jeho okolím. Řešení úlohy metodou sítí ilustruje tento příklad:

Metodou sítí s krokem $h = 0,2$ aproximujte teplotu $y(x)$ látky s tepelnou vodivostí $0,2 \text{ W m}^{-1} (^\circ\text{C})^{-1}$, protékající intervalem $\langle 0, 1 \rangle$ rychlostí $1,5 \text{ m s}^{-1}$ a zahříváné s intenzitou $1 - x \text{ W m}^{-1}$. Látka do intervalu vtéká přes bod 0 o teplotě 1°C a přes bod 1 teplo z intervalu uniká s intenzitou $0,4 \text{ W}$.

Fyzikální představa: Částice látky protékají intervalem délky 1 m konstantní rychlostí $1,5 \text{ m s}^{-1}$, takže v něm pobudou $2/3 \text{ s}$ a po tuto dobu jsou zahřívány s intenzitou, lineárně klesající z hodnoty 1 na 0, tj. o průměru

$1/2 \text{ W m}^{-1}$. Jejich teplota by se proto měla zvýšit z 1°C pro $x = 0$ na $4/3^\circ\text{C}$ pro $x = 1$. Viz tenký graf na Obr. 5. Navíc však teplo uniká z intervalu přes bod 1 s intenzitou $0,4 \text{ W}$, což způsobuje pokles teploty v bodu 1 a v jeho blízkém okolí. Tento odhad průběhu teploty (grafu funkce $y(x)$) je na Obr. 5 znázorněn tučně.



Obrázek 5. Představa o grafu funkce $y(x)$

Řešení: Jde o úlohu (3) s koeficienty $a^2 = 0,2$, $p(x) = 1,5$, $q(x) = 0$ a $f(x) = 1 - x$ a s okrajovými podmínkami $y(0) = 1$, $-0,2y'(1) = 0,4$, tj.

$$-0,2y'' + 1,5y' = 1 - x \quad \text{v } (0,1), \quad y(0) = 1, \quad -0,2y'(1) = 0,4.$$

Řešení metodou sítí: S krokem $h = 0,2$ rozdělíme interval $\langle 0,1 \rangle$ pomocí uzlů $x_0 = 0$, $x_1 = 0,2$, $x_2 = 0,4$, $x_3 = 0,6$, $x_4 = 0,8$, $x_5 = 1$ na 5 podintervalů. Metoda sítí poskytne přibližné hodnoty $y_i \doteq y(x_i)$ pro $i = 0, \dots, 5$. Z Dirichletovy podmínky $y(0) = 1$ plyne $y_0 = 1$ a zbývající hodnoty $y_1, \dots, y_5$ jsou řešením systému lineárních rovnic, vzniklého diskretizací rovnic, získaných z dané ODR pro $x = x_i$, $i = 1, \dots, 5$ následujícím způsobem. V rovnici

$$-0,2y''(x_i) + 1,5y'(x_i) = 1 - x_i,$$

aproximujeme $y'(x_i)$ centrální diferencí $(y_{i+1} - y_{i-1})/0,4$ a $y''(x_i)$ druhou centrální diferencí $(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})/0,04$ s výsledkem

$$-0,2 \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{0,04} + 1,5 \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{0,4} = 1 - x_i.$$

Po vynásobení $h^2 = 0,04$ a po úpravě vznikne systém rovnic

$$\begin{array}{rrrrrrr} -0,35y_0 & +0,40y_1 & -0,05y_2 & & & & = 0,032 \\ & -0,35y_1 & +0,40y_2 & -0,05y_3 & & & = 0,024 \\ & & -0,35y_2 & +0,40y_3 & -0,05y_4 & & = 0,016 \\ & & & -0,35y_3 & +0,40y_4 & -0,05y_5 & = 0,008 \\ & & & & -0,35y_4 & +0,40y_5 & -0,05y_6 = 0 \end{array}$$

Za y_0 do 1. rovnice dosadíme hodnotu 1 a za y_6 do 5. rovnice dosadíme vyjádření z diskretizace Neumannovy podmínky centrální diferencí:

$$-0,2y'(1) = 0,4 \implies -0,2\frac{y_6 - y_4}{0,4} = 0,4 \implies y_6 = y_4 - 0,8.$$

Vznikne systém rovnic

$$\begin{bmatrix} 0,40 & -0,05 & 0 & 0 & 0 & 0,382 \\ -0,35 & 0,40 & -0,05 & 0 & 0 & 0,024 \\ 0 & -0,35 & 0,40 & -0,05 & 0 & 0,016 \\ 0 & 0 & -0,35 & 0,40 & -0,05 & 0,008 \\ 0 & 0 & 0 & -0,40 & 0,40 & -0,04 \end{bmatrix},$$

který má řešení

$$y_1 = 1,10218, \quad y_2 = 1,17746, \quad y_3 = 1,22437, \quad y_4 = 1,23293, \quad y_5 = 1,13293.$$

V tabulce jsou uvedeny hodnoty $y(x_i)$ přesného řešení

$$y(x) = 1 + \frac{26}{45}x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{172}{675}(e^{\frac{15}{2}x} - 1) \cdot e^{-\frac{15}{2}},$$

aproximace y_i a chyby $e_i = y(x_i) - y_i$ pro $i = 1, \dots, 5$:

i	1	2	3	4	5
x_i	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$y(x_i)$	1,10173	1,17509	1,21412	1,19217	0,98977
y_i	1,10218	1,17746	1,22437	1,23293	1,13293
e_i	0,00045	0,00237	0,01025	0,04076	0,14316

Níže uvedený příklad ilustruje případy, pro něž „standardní“ metoda sítí poskytuje tzv. nestabilní aproximace řešení. Je vyřešen metodou sítí a dvěma jejími jednoduchými modifikacemi, které tuto nestabilitu odstraňují.

Aproximujte řešení úlohy

$$-0,02y'' + 4y' = 1, \quad y(0) = 5, \quad y(1) = 0$$

s krokem $h = 0,2$ metodou sítí, metodou umělé difúze a upwindem. Porovnejte velikosti chyb těchto aproximací.

Fyzikální představa: Úloha je mj. modelem tohoto procesu: Částice proudící látky protékají intervalem délky 1 m konstantní rychlostí 4 ms^{-1} , takže v něm pobudou $1/4\text{ s}$ a po tuto dobu jsou zahřívány s intenzitou 1 Wm^{-1} . Jejich

teplota by se proto měla zvýšit z 5^0C pro $x = 0$ na $5,25^0C$ pro $x = 1$. Tomu odpovídá graf přesného řešení na Obr. 4 v celém intervalu $(0, 1)$ s výjimkou malého podintervalu, tzv. *hraniční vrstvy* v okolí bodu 1. Z této vrstvy teplo uniká ven přes bod 1 s intenzitou, způsobující ochlazení proudící látky na teplotu 0^0C v bodu $x = 1$. Protože látka vtéká do bodu 1 s velkou rychlostí 4 ms^{-1} a koeficient tepelné vodivosti $0,02\text{ Wm}^{-1}(^0C)^{-1}$ je relativně malý, teplota látky se snižuje jen v malé hraniční vrstvě okolo bodu 1.

Interval $\langle 0, 1 \rangle$ rozdělíme uzly $x_0 = 0, x_1 = 0,2, x_2 = 0,4, x_3 = 0,6, x_4 = 0,8, x_5 = 1$ na 5 podintervalů délky h a hledáme aproximace y_i hodnot $y(x_i)$ pro $i = 0, \dots, 5$. Z Dirichletových podmínek plyne $y_0 = 5$ a $y_5 = 0$.

Metoda sítí: Neznámé $y_1, \dots, y_4$ jsou řešením systému lineárních rovnic vzniklých diskretizací identit

$$-0,02y''(x_i) + 4y'(x_i) = 1$$

pro $i = 1, \dots, 4$ užitím centrálních diferencí. Výsledkem je soustava

$$-0,42y_{i-1} + 0,04y_i + 0,38y_{i+1} = 0,04 \quad \text{pro } i = 1, \dots, 4.$$

Po dosazení hodnot $y_0 = 5$ a $y_5 = 0$ vznikne systém rovnic

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0,04 & 0,38 & 0 & 0 & 2,14 \\ -0,42 & 0,04 & 0,38 & 0 & 0,04 \\ 0 & -0,42 & 0,04 & 0,38 & 0,04 \\ 0 & 0 & -0,42 & 0,04 & 0,04 \end{array} \right]$$

a jeho řešením jsou aproximace

$$y_1 = 0,87828, \quad y_2 = 5,53913, \quad y_3 = 0,49292, \quad y_4 = 6,17557.$$

V tabulce jsou pro $i = 1, \dots, 4$ uvedeny hodnoty $y(x_i)$ přesného řešení

$$y(x) = 5 + \frac{21}{4(1 - e^{200})} \cdot e^{200x} + \frac{1}{4}x,$$

jejich aproximace y_i a chyby $e_i = y(x_i) - y_i$.

i	1	2	3	4
x_i	0,2	0,4	0,6	0,8
$y(x_i)$	5,05	5,10	5,15	5,20
y_i	0,87828	5,53913	0,49292	6,17557
e_i	4,17172	-0,43913	4,65708	-0,97557

Vidíme, že uzlové chyby aproximace jsou obrovské a střídají znaménka, takže neposkytují o přesném řešení žádnou rozumnou informaci. Říkáme, že tato aproximace je *nestabilní* nebo že *osciluje*. Ve skriptech [5] je vysvětleno, že takto nestabilní aproximace vznikají, když matice systému lineárních rovnic není monotónní (tj. má mimo hlavní diagonálu kladné hodnoty) a tato skutečnost je ekvivalentní s podmínkou

$$\text{existuje } i \in \{0, \dots, n\} \text{ tak, že } a^2 < \left| \frac{h}{2} p(x_i) \right|. \quad (2)$$

Metoda umělé difúze: Je-li řešení metodou sítí nestabilní, tj. je-li splněna podmínka (2), pak v řešené okrajové úloze nahradíme koeficient a^2 nejmenším větším koeficientem $\bar{a}^2$ tak, aby

$$\bar{a}^2 \geq \left| \frac{h}{2} p(x_i) \right| \quad \text{pro } i = 0, \dots, n$$

a takto modifikovaná úloha se řeší metodou sítí. V řešené úloze je $a^2 = 0,02$ a $|hp(x_i)/2| = 0,4$ pro $i = 0, \dots, 5$ a proto položíme $\bar{a}^2 = 0,4$ a metodou sítí řešíme úlohu

$$-0,4y'' + 4y' = 1, \quad y(0) = 5, \quad y(1) = 0.$$

Vznikne systém rovnic

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0,8 & 0 & 0 & 0 & 4,04 \\ -0,8 & 0,8 & 0 & 0 & 0,04 \\ 0 & -0,8 & 0,8 & 0 & 0,04 \\ 0 & 0 & -0,8 & 0,8 & 0,04 \end{array} \right]$$

s monotónní maticí a jeho řešením jsou aproximace $y_1 = 5,05$, $y_2 = 5,10$, $y_3 = 5,15$, $y_4 = 5,20$. Ty jsou v režimu zaokrouhlování na 5 desetinných míst totožné s hodnotami přesného řešení.

Upwind: Tato metoda se liší od metody sítí tím, že derivaci $y'(x_i)$ místo centrální diferencí $(y_{i+1} - y_{i-1})/(2h)$ aproximujeme

$$\begin{cases} \text{zpětnou diferencí } (y_i - y_{i-1})/h & \text{pro } p > 0, \\ \text{diferencí směrem dopředu } (y_{i+1} - y_i)/h & \text{pro } p < 0. \end{cases}$$

Protože v řešené úloze $p = 4 > 0$, užijeme zpětné difference s výsledkem

$$-0,02 \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{0,04} + 4 \frac{y_i - y_{i-1}}{0,2} = 1$$

a po úpravě

$$-0,82y_{i-1} + 0,84y_i - 0,02y_{i+1} = 0,04$$

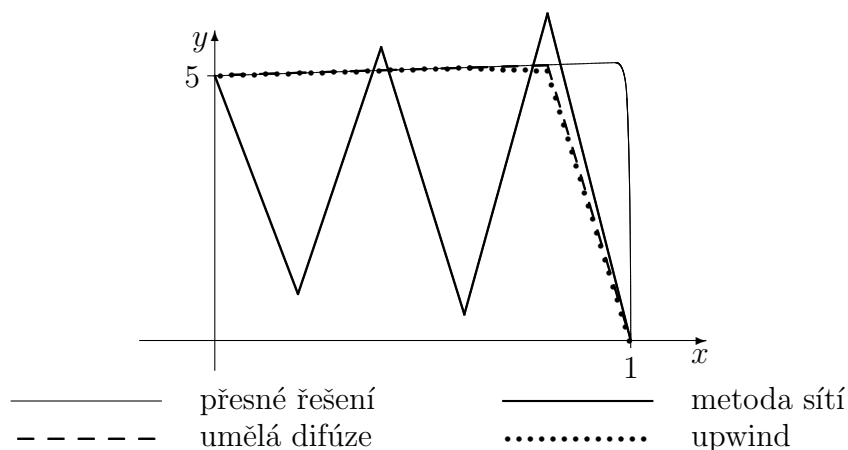
pro $i = 1, \dots, 4$. Dosazením $y_0 = 5$ a $y_5 = 0$ vznikne systém rovnic s monotónní maticí

$$\begin{bmatrix} 0,84 & -0,02 & 0 & 0 & | & 4,14 \\ -0,82 & 0,84 & -0,02 & 0 & | & 0,04 \\ 0 & -0,82 & 0,84 & -0,02 & | & 0,04 \\ 0 & 0 & -0,82 & 0,84 & | & 0,04 \end{bmatrix}.$$

Přesné hodnoty řešení dané úlohy, vypočtené aproximace y_1, y_2, y_3, y_4 a jejich chyby jsou uvedeny v tabulce:

i	1	2	3	4
x_i	0,2	0,4	0,6	0,8
$y(x_i)$	5,05	5,10	5,15	5,20
y_i	5,05000	5,09992	5,14688	5,07195
e_i	0,0	0,00008	0,00312	0,12805

Grafy přesného řešení úlohy a lineárních splajnů přiřazených aproximací, vypočteným třemi numerickými metodami, jsou znázorněny na Obr. 6.



Obrázek 6. Grafy řešení úlohy a jeho aproximací

Příklady k procvičení:

Řešení okrajových úloh z příkladů 1 - 35 aproximujte metodou sítí s daným krokem h .

1. $-y'' - 2y' + y = 0, \quad y(-1) = 8, \quad y(0) = 0, \quad h = 0,25$
2. $-y'' + y = -2e^x, \quad y'(-1) = 0, \quad y(0) = 0, \quad h = 0,2$

3. $-y'' - 0,5e^x y' = 2x, \quad y'(0) - 2y(0) = -1, \quad y(1) = 3, \quad h = 0,25$
4. $-y'' + x^2 y = -x^3, \quad y'(0) = -1, \quad y'(1,2) = 1, \quad h = 0,4$
5. $-0,1y'' + y' = 3x + 1, \quad y(0) = 20, \quad 0,1y'(1) + 0,5y(1) = 2,5, \quad h = 0,25$
6. $-0,25y'' + y' = 1, \quad y(0) = 1, \quad -0,25y'(1) = 0,5y(1), \quad h = 0,25$
7. $-0,001y'' - (x^2 + 1)y' = 0,5, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad h = 0,2$
8. $-y'' + y = x, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2, \quad h = 0,2$
9. $-y'' = -6x, \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = -2, \quad h = 0,2$
10. $-y'' + 0,1y = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(2) = 5, \quad h = 0,5$
11. $-y'' + 0,3x^2 y = x, \quad y'(0) = -1, \quad y(1) = 2, \quad h = 0,25$
12. $-y'' + x^2 y = 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0,8) = -1, \quad h = 0,2$
13. $-y'' + (x + 2)y = e^x, \quad y(0) - y'(0) = 1, \quad y(1) = -1, \quad h = 0,25$
14. $-y'' + \frac{1}{x+1}y = \ln(x + 1), \quad 2y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad h = 0,25$
15. $-0,5y'' + y = 1, \quad 0,5y'(0) = 1, \quad y(1) = 1, \quad h = 0,2$
16. $-0,2y'' + y' = x^2, \quad y(0) = 1, \quad -0,2y'(1) = 2y(1) - 2, \quad h = 0,2$
17. $-y'' + 2y = x, \quad y(0) = 0, \quad -y'(1) = 4y(1) - 2, \quad h = 0,2$
- *18. $-0,2y'' + y' = 2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad h = 0,25$
19. $-y'' + 0,5y' = 1, \quad y(0) = 1, \quad -y'(1) = 1, \quad h = 0,2$
20. $-y'' - 2y' = x, \quad y'(0) = 0,5y(0) - 1, \quad y(1) = 1, \quad h = 0,25$
21. $-0,1y'' + y' = x, \quad y(0) = 1, \quad -0,1y'(1) = y(1), \quad h = 0,2$
22. $-y'' + 4y' = x^2, \quad y(0) = 1, \quad -y'(1) = 2y(1) - 1, \quad h = 0,25$
23. $-0,4y'' + y' = 0,5, \quad y(0) = 1, \quad -0,4y'(1) = 2y(1) - 1, \quad h = 0,2$
24. $-0,1y'' + y' = 1, \quad y(0) = 2, \quad -0,1y'(1) = 0,5y(1), \quad h = 0,25$
25. $-0,5y'' + y' = 2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad h = 0,25$
26. $-y'' + 5y' = 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0, \quad h = 0,2$
27. $-y'' + (x + 2)y = x, \quad y'(1) = 0, \quad y'(2) = 0, \quad h = 0,2$

28. $-0,25y'' + y' = 1, \quad y(0) = 1, \quad -0,25y'(1) = 0,5y(1), \quad h = 0,25$
29. $-y'' + xy = x, \quad y(0) - 2y'(0) = -1, \quad 2y(1) + y'(1) = 1, \quad h = 0,2$
30. $-y'' + y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad h = 0,2$
31. $-y'' + y = x, \quad y(0) + y'(0) = 3, \quad 2y(1) + y'(1) = -2, \quad h = 0,2$
32. $-y'' + y = 4xe^x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad h = 0,2$
33. $-0,1y'' + y' = x, \quad y(0) = 1, \quad y(1) + 0,1y'(1) = 0, \quad h = 0,2$
34. $-y'' + \frac{e^x}{x+1}y = x^2, \quad 2y(0) - y'(0) = -1, \quad y(1) + 2y'(1) = 1, \quad h = 0,2$
35. $-y'' + xy = 3x, \quad y(0) = 0, \quad y(4) = 0, \quad h = 1.$

Řešení okrajových úloh z příkladů 36 a 37 aproximujte metodou sítí, metodou umělé difúze a upwindem se zadaným krokem h .

- *36. $-0,04y'' + 5y' = x, \quad y(0) = 1, \quad y(2) = -1, \quad h = 0,4$
- *37. $-0,1y'' + (x + 2)y' = 0,5, \quad y(0) = 2, \quad y'(1) = -2, \quad h = 0,2.$

7 Numerická integrace

Numerická integrace se používá pro přibližný výpočet určitých integrálů všude tam, kde integrál nelze vypočítat přesně nebo tam, kde je na výpočet různých integrálů nutno použít jednoho postupu. První z uvedených případů může nastat z důvodu, že pro daný integrand neexistuje elementární primitivní funkce nebo proto, že hodnoty integrované funkce jsou známy jen v konečném počtu bodů; tak je tomu v této úloze:

Rychlost $v(t)$ [m/s] rakety vypuštěné ze Země ve vertikálním směru byla naměřena 6 krát každých 5 s. Viz tabulka. Použijte (složené) Simpsonovo pravidlo pro aproximaci výšky rakety po 30 s letu.

t [s]	0	5	10	15	20	25	30
$v(t)$ [m/s]	0	20,2	60,0	113,9	176,1	241,2	303,5

Řešení: V daném případě je výška rakety rovna dráze $s(30)$, kterou urazila od startu (od času $t = 0$). Tedy

$$\begin{aligned} s(30) &= \int_0^{30} v(t) dt \\ &\doteq \frac{5}{3} (0 + 4 \cdot 20,2 + 2 \cdot 60,0 + 4 \cdot 113,9 + 2 \cdot 176,1 + 4 \cdot 241,2 + 303,5) \\ &= 3794,8m \end{aligned}$$

Příklady k procvičení

1. Najděte aproximace I_O a I_L integrálu

$$I(f) = \int_0^1 (1 - x^3) dx$$

obdélníkovým a lichoběžníkovým pravidlem pro počet podintervalů $n = 2$. Potom integrál vypočtete přesně a určete chyby E_O a E_L .

2. Úlohu z příkladu 1 vyřešte pro integrál

$$I(f) = \int_1^2 e^{-x^2} dx$$

a když víte, že $I(f) = 0,135257$. Zaokrouhľte na 5 desetinných míst.

3. Z příkladů 1 a 2 je patrné, že $E_L \doteq -2E_O$ a ekvivalentně $E_L + 2E_O \doteq 0$. Potom pravidlo, které integrál $I(f)$ aproximuje hodnotou $(I_L + 2I_O)/3$ má chybu $(E_L + 2E_O)/3$ a mělo by tedy být velmi přesné. Vyjádřete aproximace $(I_L + 2I_O)/3$ pro hodnoty I_O a I_L z příkladů 1 a 2 jako kombinace hodnot funkce f . Jaké známé pravidlo takto vznikne?
4. Najděte aproximace I_L pro $n = 1$ a $\bar{I}_L$ pro $n = 2$ integrálu

$$I(f) = \int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx$$

lichoběžníkovým pravidlem. Integrál vypočtete přesně a určete chyby E_L a $\bar{E}_L$. Na základě porovnání chyb najděte co nejpřesnější aproximaci ve tvaru kombinace hodnot I_L a $\bar{I}_L$. Jaké pravidlo pro numerickou integraci vznikne? Zaokrouhľte na šest desetinných míst.

5. Částice se pohybuje po přímce tak, že její rychlost v v čase t je $v(t) = t\sqrt{8-t^3}$. Použitím složeného Simpsonova pravidla pro $n = 8$ určete přibližně, jakou dráhu s částice urazí od $t = 0$ do $t = 2$.
6. Integrál $I(f) = \int_1^{3,4} xe^x dx$
- vypočtete přesně,
 - vypočtete přibližně obdélníkovým, lichoběžníkovým i Simpsonovým pravidlem pro 6 podintervalů a určete chyby těchto aproximací,
 - najděte horní odhad chyb aproximací z b) užitím obecných tvarů
- $$E_O = \frac{lh^2}{24}f''(\xi_1), \quad E_L = -\frac{lh^2}{12}f''(\xi_2), \quad E_S = -\frac{lh^4}{180}f^{(4)}(\xi_3)$$
- pro délku $l = b - a$ a vhodná $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (a, b)$. Tyto odhady porovnejte s chybami z kroku b),
- Pro každé z použitých pravidel určete počet podintervalů, zaručující chybu, menší než $\varepsilon = 0,1$.
7. Příklad 6 vyřešte pro integrál $I(f) = \int_2^4 x \ln x dx$. Volte 4 podintervaly.
8. Určete počet podintervalů, který zaručí, že chyba aproximace níže uvedených integrálů a) - f) obdélníkovým, lichoběžníkovým a Simpsonovým pravidlem bude menší, než ε .

$$a) \int_0^1 \sin(\pi x) dx, \quad \varepsilon = 0,01$$

$$b) \int_0^1 e^{-2x} dx, \quad \varepsilon = 0,005$$

$$c) \int_0^2 \sin(x^2) dx, \quad \varepsilon = 0,001$$

$$d) \int_0^1 \cos x \cdot e^x dx, \quad \varepsilon = 0,001$$

$$e) \int_0^1 e^{-x} \sin x dx, \quad \varepsilon = 0,0005$$

$$f) \int_{-1}^2 (x^3 + e^{-x}) dx, \quad \varepsilon = 0,000005$$

9. Vzorce pro dvoubodovou a třibodovou Gaussovu kvadraturu zjednodušte pro interval $\langle -1, 1 \rangle$. Integrál

$$I(f) = \int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2 - x + 1,25} dx = 1,69191 \quad \text{aproximujte}$$

- a) dvoubodovou a třibodovou Gaussovou kvadraturou,
b) Simpsonovým pravidlem pro $n = 2$ a $n = 4$,

vypočtěte jejich chyby E_{G2} , E_{G3} , E_{S2} , E_{S4} a porovnejte je.

10. Integrály a) - c) aproximujte dvoubodovou Gaussovou kvadraturou a jednoduchým Simpsonovým pravidlem a vypočtěte chyby těchto aproximací.

$$a) \int_1^e \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx = 0,785398$$

$$b) \int_1^2 \frac{\ln x}{1+x} dx = 0,147221$$

$$c) \int_0^{0,5} \sin(e^{t/2}) dt = 0,451976$$

11. Integrály a) - d) aproximujte třibodovou Gaussovou kvadraturou a Simpsonovým pravidlem pro $n = 4$ a vypočtěte chyby těchto aproximací.

$$a) \int_1^\pi x \sin x dx = 2,840424$$

$$b) \int_0^{2\pi} (\cos x)^2 (\sin x)^2 dx = 0,785398$$

$$c) \int_0^3 \frac{1}{1+t^2+t^4} dt = 0,895372$$

$$d) \int_0^4 \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx = 6,075896$$

12. Integrál

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx = 1,605413$$

aproximujte tříbodovou Gaussovou kvadraturou a Simpsonovým pravidlem pro $n = 8$ a vypočtěte chyby těchto aproximací. Jakou hodnotu přiřadíte funkci $\sin x/x$ pro $x = 0$?

13. Integrál

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{0,9x-1,1y} dx dy$$

vypočtěte přesně, aproximujte

- a) jednoduchým obdélníkovým pravidlem
- b) jednoduchým lichoběžníkovým pravidlem
- c) jednoduchým Simpsonovým pravidlem

a vypočtěte chyby všech aproximací.

14. Integrál z příkladu 13 aproximujte složeným

- a) obdélníkovým pravidlem,
- b) lichoběžníkovým pravidlem a
- c) Simpsonovým pravidlem,

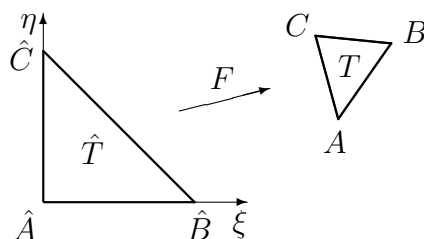
když obě strany čtverce $\langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle$ rozdělíte na 4 podintervaly a vypočtěte chyby těchto aproximací.

15. Odvoďte vzorec pro výpočet plochy $|T|$ trojúhelníka $T = \overline{ABC}$ s vrcholy $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$. Počítejte $|T| = \int \int_T dx dy$ transformací F :

$$\begin{aligned} x &= a_1 + \xi(b_1 - a_1) + \eta(c_1 - a_1) \\ y &= a_2 + \xi(b_2 - a_2) + \eta(c_2 - a_2) \end{aligned}$$

na trojúhelník $\hat{T} = \overline{\hat{A}\hat{B}\hat{C}}$ s vrcholy $\hat{A} = [0, 0]$, $\hat{B} = [1, 0]$, $\hat{C} = [0, 1]$ z Obr. 7.

Obrázek 7



16. Pro body $A = [1; 0]$, $B = [2; 0,5]$ a $C = [0,5; 2]$ a pro trojúhelník $T = \overline{ABC}$ aproximujte integrál

$$I(f) = \int \int_T (x^3 - 0,5y^3 - 4(x+y)y) dx dy = -6,38672$$

každým ze tří známých pravidel.

17. Numerickou integrací vypočtete přesnou hodnotu integrálu

$$I(f) = \int \int_{\Omega} (2 - (x - 0,5)^2 - 2y^2) dx dy$$

přes polygon $\Omega = \overline{ABCDEFG}$, když $A = [1,5; 0,5]$, $B = [0,7; 0,9]$, $C = [0; 0,7]$, $D = [-0,6; 0,2]$, $E = [0; -0,8]$, $F = [0,6; -0,9]$, $G = [1,6; -0,4]$.
 $\{I(f) = 3,738625.\}$

8 Řešení okrajové úlohy pro ODR 2. řádu metodou konečných prvků

V této kapitole jsou metodou konečných prvků (stručně MKP) řešeny konkrétní příklady okrajové úlohy pro ODR 2. řádu stejného typu jako v kapitole 6. Vzorové řešení MKP je předvedeno na příkladu

$$-0,2y'' + 1,5y' = 1 - x \quad \text{v} \quad (0,1), \quad y(0) = 1, \quad -0,2y'(1) = 0,4$$

s krokem $h = 0,2$, který je stejný jako v kap. 6. Postup řešení MKP je pouze uveden. Jednotlivé kroky ani použitá terminologie a značení nejsou vysvětleny. MKP je vysvětlována v přednáškách a v kapitole 14 skript [5].

Řešení úlohy MKP spočívá v postupném provedení těchto kroků 1 až 3:

1. *Galerkinova (slabá) formulace*: Nejprve se libovolnou (blíže nespecifikovanou) *testovací funkcí* v s vlastností $v(0) = 0$ obě strany dané ODR vynásobí a zintegrují přes daný interval s výsledkem

$$\int_0^1 (-0,2y'' + 1,5y')v \, dx = \int_0^1 (1-x)v \, dx. \quad (1)$$

Levá strana se *symetrizuje* tím, že součin $-0,2y''v$ se integruje metodou per partes s volbou $s' = -0,2y''$, $t = v$ a při počítání $[s \cdot t]_0^1 = [-0,2y'v]_0^1$ se užijí identity $-0,2y'(1) = 0,4$ a $v(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-0,2y''v) \, dx &= \left| \begin{array}{cc} s' = -0,2y'' & t = v \\ s = -0,2y' & t' = v' \end{array} \right| = [-0,2y'v]_0^1 + \int_0^1 0,2y'v' \, dx \\ &= 0,4v(1) + \int_0^1 0,2y'v' \, dx. \end{aligned}$$

Dosažením výsledku do (1) a umístěním právě všech členů obsahujících hledané řešení y na levou stranu vznikne identita

$$\int_0^1 (0,2y'v' + 1,5y'v) \, dx = \int_0^1 (1-x)v \, dx - 0,4v(1). \quad (2)$$

Levou stranu (2) značíme standardně $B(y, v)$ a pravou $L(v)$, takže

$$B(y, v) = \int_0^1 (0,2y'v' + 1,5y'v) \, dx \quad \text{a} \quad L(v) = \int_0^1 (1-x)v \, dx - 0,4v(1).$$

Pro Galerkinovu formulaci úlohy zbývá najít co největší množiny *přípustných řešení* W a *testovacích funkcí* V tak, aby identita (2) měla na obou stranách konečnou hodnotu pro všechna $y \in W$ a $v \in V$. Symetrizací byla náročnost tohoto požadavku na funkce y a v sjednocena, *přirozená* Neumannova okrajová podmínka byla „zabudovaná“ do rovnosti (2), ale splnění *podstatných* Dirichletových okrajových podmínek je nutno požadovat. Proto položíme

$$W = \{y \in H^1(0, 1); y(0) = 1\}, \quad V = \{v \in H^1(0, 1); v(0) = 0\}$$

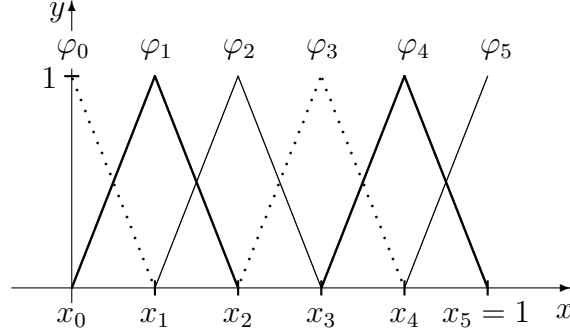
a tedy *Galerkinova (slabá) formulace* zní:

$$\text{Najděte } y \in W \text{ tak, aby } B(y, v) = L(v) \text{ pro všechna } v \in V. \quad (3)$$

2. *Diskretizace*: Interval rozdělíme uzly $x_i = ih$ pro $i = 0, \dots, 5$ s krokem $h = 0,2$, tj. budeme hledat přibližné řešení ve tvaru

$$y_h = \varphi_0 + y_1\varphi_1 + \dots + y_5\varphi_5.$$

Grafy nenulových hodnot funkcí $\varphi_0, \dots, \varphi_5$ jsou znázorněny na Obr. 8.

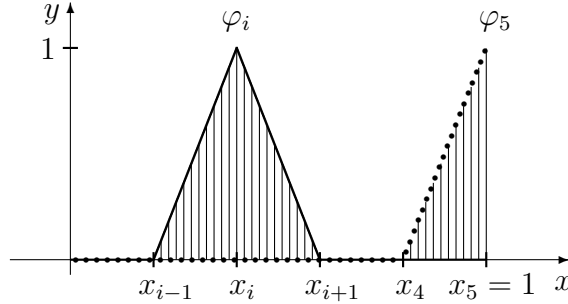


Obrázek 8

Funkce y_h se dosadí za y do (3) a jako testovací funkce se použijí $\varphi_1, \dots, \varphi_5$; tj. právě ty funkce, u nichž je v y_h neznámý koeficient. Takto vznikne systém 5 rovnic pro neznámé $y_1, \dots, y_5$ s rozšířenou třídiagonální maticí

$$\begin{bmatrix} B(\varphi_1, \varphi_1) & B(\varphi_2, \varphi_1) & & & \\ B(\varphi_1, \varphi_2) & B(\varphi_2, \varphi_2) & B(\varphi_3, \varphi_2) & & \\ & B(\varphi_2, \varphi_3) & B(\varphi_3, \varphi_3) & B(\varphi_4, \varphi_3) & \\ & & B(\varphi_3, \varphi_4) & B(\varphi_4, \varphi_4) & B(\varphi_5, \varphi_4) \\ & & & B(\varphi_4, \varphi_5) & B(\varphi_5, \varphi_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{L}(\varphi_1) \\ L(\varphi_2) \\ L(\varphi_3) \\ L(\varphi_4) \\ L(\varphi_5) \end{bmatrix},$$

kde $\tilde{L}(\varphi_1) = L(\varphi_1) - B(\varphi_0, \varphi_1)$. Při výpočtu hodnot prvků této matice lze využít skutečnosti, že $\int_0^1 \varphi_i(x) dx = 0,2$ pro $i = 1, \dots, 4$ a $\int_0^1 \varphi_5(x) dx = 0,1$ jsou obsahy trojúhelníků vyšrafovaných na Obr. 9 a funkce φ_i mají hodnoty



Obrázek 9

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 5(x - x_{i-1}) \\ 5(x_{i+1} - x) \\ 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad \varphi'_i(x) = \begin{cases} 5 & \text{pro } x \in (x_{i-1}, x_i) \cap \langle 0, l \rangle \\ -5 & \text{pro } x \in (x_i, x_{i+1}) \cap \langle 0, l \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (4)$$

pro $i = 0, \dots, 5$. Protože φ_{i-1} i φ_i jsou nenulové jen pro $x \in (x_{i-1}, x_i)$, platí

$$\begin{aligned} B(\varphi_{i-1}, \varphi_i) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (0,2\varphi'_{i-1}\varphi'_i + 1,5\varphi'_{i-1}\varphi_i) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (-5 - 7,5\varphi_i) dx \\ &= -1 - 7,5 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i dx = -1,75 \end{aligned}$$

pro $i = 1, \dots, 5$. Analogicky

$$\begin{aligned} B(\varphi_{i+1}, \varphi_i) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (0,2\varphi'_{i+1}\varphi'_i + 1,5\varphi'_{i+1}\varphi_i) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-5 + 7,5\varphi_i) dx \\ &= -1 + 7,5 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i dx = -0,25 \end{aligned}$$

pro $i = 1, \dots, 4$,

$$\begin{aligned} B(\varphi_i, \varphi_i) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (0,2\varphi_i'^2 + 1,5\varphi_i'\varphi_i) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (0,2\varphi_i'^2 + 1,5\varphi_i'\varphi_i) dx \\ &= 1 + 7,5 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i dx + 1 - 7,5 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i dx = 2 \end{aligned}$$

pro $i = 1, \dots, 4$ a

$$\begin{aligned} B(\varphi_5, \varphi_5) &= \int_{0,8}^1 (0,2\varphi_5'^2 + 1,5\varphi_5'\varphi_5) dx \\ &= \int_{0,8}^1 (0,2 \cdot 25 + 7,5\varphi_5) dx = 1 + 0,75 = 1,75. \end{aligned}$$

Zbývá spočítat složky vektoru pravých stran. Dle (4) je pro $i = 1, \dots, 4$

$$\begin{aligned} L(\varphi_i) &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)(1-x)dx = \left| \begin{array}{l} t = x - x_i \\ dt = dx \end{array} \right| \\ &= \int_{-0,2}^{0,2} \varphi_i(t+x_i)(1-x_i-t)dt \\ &= (1-x_i) \int_{-0,2}^{0,2} \varphi_i(t+x_i)dt - \int_{-0,2}^{0,2} t\varphi_i(t+x_i)dt = 0,2(1-x_i) \\ &\quad - 5 \int_{-0,2}^0 t(0,2+t)dt - 5 \int_0^{0,2} t(0,2-t)dt = 0,2(1-x_i) \quad \text{a} \\ L(\varphi_5) &= \int_{0,8}^1 \varphi_5 \cdot (1-x)dx - 0,4 = \int_{0,8}^1 \varphi_5 dx - \int_{0,8}^1 x\varphi_5 dx - 0,4 \\ &= 0,1 - 5 \int_{0,8}^1 x(x-0,8)dx - 0,4 = -0,39333, \end{aligned}$$

takže rozšířená matice soustavy je

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -0,25 & & & 1,91 \\ -1,75 & 2 & -0,25 & & 0,12 \\ & -1,75 & 2 & -0,25 & 0,08 \\ & & -1,75 & 2 & -0,25 \\ & & & -1,75 & 1,75 \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ -0,39333 \end{array}.$$

3. Řešením soustavy rovnic získáme hodnoty $y_1, \dots, y_5$ přibližného řešení v uzlech $x_1, \dots, x_5$, uvedené v Tabulce 1.

i	1	2	3	4	5
x_i	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$y(x_i)$	1,10173	1,17509	1,21412	1,19217	0,98977
y_i	1,10213	1,17704	1,22144	1,21218	0,98742
$\bar{y}_{2i}$	1,10185	1,17562	1,21586	1,19622	0,98917

Tabulka 1

V tabulce jsou uvedeny i aproximace $\bar{y}_{2i}$ řešení v uzlech x_i , vypočtené metodou konečných prvků s krokem $h = 0,1$ a hodnoty $y(x_i)$ přesného řešení

$$y(x) = 1 + \frac{26}{45}x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{172}{675} \left(e^{\frac{15}{2}x} - 1 \right) e^{-\frac{15}{2}}.$$

Příklady k procvičení

a) *Úlohy s konstantními koeficienty a s nulovou absorpcí.* Řešení úloh 1 - 13 nejprve schematicky nakreslete na základě znalosti fyzikálního významu a potom je aproximujte MKP s daným krokem h .

- *1. $-y'' = 1, y(0) = 1, y(1) = 0, h = 1/6$
- 2. $-0,5y'' = 1, y(0) = -1, -0,5y'(1) = 1, h = 1/5$
- 3. $-y'' = 1, y(0) = -1, -y'(1) = 1, h = 1/5$
- 4. $-y'' = 0, y(0) = 2, -y'(1) = 2(y(1) - 0,5), h = 1/4$
- 5. $-0,2y'' = 1,5, 0,2y'(0) = 0,5y(0), y(1) = 0, h = 1/4$
- 6. $-0,4y'' = 1,5, 0,4y'(0) = 1, y(1) = 2, h = 1/5$
- 7. $-4y'' + 3y' = -1, y(0) = 2, y(1) = 0, h = 1/6$
- 8. $-0,8y'' + y' = 1, y(0) = 0, -0,8y'(1) = 1, h = 1/5$
- 9. $-0,4y'' + y' = 2, y(0) = -1, -0,4y'(1) = 2y(1), h = 1/4$
- 10. $-0,5y'' - y' = 1, y(0) = 0, y(1) = 0, h = 1/6$
- 11. $-0,2y'' - y' = 1, y(0) = 0, y(1) = 0, h = 1/6$
- 12. $-y'' - 0,5y' = 2, y'(0) = 2(y(0) - 0,5), y(1) = 0, h = 1/5$
- *13. $-2y'' - 0,4y' = 1, 2y'(0) = -1, y(1) = 1,2, h = 1/5$

b) *Úlohy s nekonstatním koeficientem tepelné vodivosti - rovnice v divergenčním tvaru*

*14. $-\left[(1+x)y'\right]' + 1,2y' = 1, y(0) = 1, -2y'(1) = 0,4(y(1) - 0,8), h = 1/5$

15. $-\left[\cos(x)y'\right]' - y' = -1, y'(0) = -3, y(1) = 4, h = 1/5$

16. $-\left[(1-0,4x)y'\right]' + 0,2y' = 1, y(0) = 0, -0,6y'(1) = 2, h = 1/4$

17. $-\left[(1-(x-0,5)^2)y'\right]' - 2y' = 0,8, 0,75y'(0) = 0, y(1) = 0, h = 1/4$

c) *Úlohy s kladným koeficientem absorpce nebo s proměnnou intenzitou zdrojů.* Jak naznačuje řešená úloha, je přesný výpočet hodnot $L(\varphi_i)$ relativně složitý i pro intenzitu zdrojů $f(x) = 1 - x$. Proto požadujeme, aby ve shodě se standardními procedurami byly v úlohách 18 - 23 integrály přes intervaly (x_{i-1}, x_i) počítány přibližně jednoduchým lichoběžníkovým pravidlem.

18. $-y'' + 0,5y = 1/(x+1), y(0) = 1, -y'(1) = 2(y(1) - 0,2), h = 1/4$

*19. $-0,3y'' + y' + y = x^2, y(0) = 0 = y(1), h = 1/5$

20. $-\left[(0,1+x)y'\right]' + y = 1+x, 0,1y'(0) = 2, y(1) = 0, h = 1/5$

*21. $-0,5y'' + 2y' + 0,4y = 2, y(0) = 1, -0,5y'(1) = 1, h = 1/4$

22. $-y'' + 3y = \sin x, y(0) = 1, y(1) = 2, h = 1/5$

*23. $-\left[(1-x^2/2)y'\right]' + y' = e^{x/2}, y(0) = 1 = y(1), h = 1/5$

9 Výsledky řešení příkladů

Kapitola 1

1. $f(x) = 0 \iff \arctg x = 1/(x-1) \implies$ rovnice má 2 kořeny $x^{(1)} \doteq -0,8$ a $x^{(2)} \doteq 2$. Z $f(-1) \cdot f(-0,5) < 0$ plyne $x^{(1)} \in (-1; -0,5)$ a z $f(1,5) \cdot f(2) < 0$ plyne $x^{(2)} \in (1,5; 2)$. Po 6 krocích metody půlení $x^{(1)} = -0,6796875 \pm 0,0078125$ a $x^{(2)} = 1,914062 \pm 0,0078125$. Po 1 kroku metody regula falsi $x^{(1)} \doteq -0,6739517$ a $|f(-0,6739517)| < 0,0073$, $x^{(2)} \doteq 1,912994$ a $|f(1,912994)| < 0,00564$.

2. $f(x) = 0 \iff \sin x = 0,2(x-1)^2 - 1 \implies$ rovnice má 2 kořeny $x^{(1)} \doteq -0,6$, $x^{(2)} \doteq 3$. $f(-0,9) \cdot f(-0,5) < 0 \implies x^{(1)} \in (-0,9; -0,6)$ a $f(3) \cdot f(3,4) < 0 \implies x^{(2)} \in (3; 3,4)$. Po 6 krocích metody půlení $x^{(1)} = -0,54375 \pm 0,00625$

a $x^{(2)} = 3,18125 \pm 0,00625$. Po 1 kroku metody regula falsi $x^{(1)} \doteq -0,549018$ a $|f(-0,549018)| < 0,00175$, $x^{(2)} \doteq 3,182256$ a $|f(3,182256)| < 0,0069$.

3. $f(x) = 0 \iff x^4 = 6 - (x - 3)^2 \implies$ rovnice má 2 kořeny $x^{(1)} \doteq 0,5$, $x^{(2)} \doteq 1,3$. $f(0,3) \cdot f(0,6) < 0 \implies x^{(1)} \in (0,3; 0,6)$ a po 5 krocích metody půlení $x^{(1)} = 0,576562 \pm 0,0046875$. Podobně $f(1,2) \cdot f(1,8) < 0 \implies x^{(2)} \in (1,2; 1,8)$. Po 6 krocích metody půlení $x^{(2)} = 1,3453125 \pm 0,0046875$. Po 2 krocích metody regula falsi $x^{(1)} \doteq 0,573092$ a $|f(0,573092)| < 0,00225$, $x^{(2)} \doteq 1,342774$ a $|f(1,342375)| < 0,0027$ po 9 krocích regula falsi.

4. $f(x) = 0 \iff e^x = 2x + 2 \implies$ rovnice má 2 kořeny $x^{(1)} \doteq -0,8$, $x^{(2)} \doteq 1,8$. $f(-0,8) \cdot f(-0,5) < 0 \implies x^{(1)} \in (-0,8; -0,5)$ a po 6 krocích metody půlení $x^{(1)} = -0,7671875 \pm 0,00469$. Podobně $f(1,4) \cdot f(1,8) < 0 \implies x^{(2)} \in (1,4; 1,8)$. Po 7 krocích metody půlení $x^{(2)} = 1,678125 \pm 0,003125$. Po 1 kroku metody regula falsi $x^{(1)} \doteq -0,76658$ a $|f(-0,76658)| < 0,00225$, $x^{(2)} \doteq 1,6781$ a $|f(1,6781)| < 0,00083$ po 3 krocích regula falsi.

5. $f(x) = 0 \iff \log x = 2x - 7 \implies$ rovnice má 1 kořen $x^{(1)} \doteq 4$. $f(3,6) \cdot f(4) < 0 \implies x^{(1)} \in (3,6; 4) \implies$ stačí provést 8 kroků metody půlení. Výsledek: $x^{(1)} = 3,78984375 \pm 0,00078125$. Po 1 kroku metody regula falsi je $x^{(1)} \doteq 3,78896$ s chybou, menší než 0,00061.

6. $f(x) = 0 \iff \ln x = \frac{1}{x} \implies$ rovnice má jeden kořen $\hat{x} \doteq 1,6$. $f(x) = 0 \iff x = F(x)$ pro $F(x) = e^{\frac{1}{x}}$ a $|F'(x)| = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ je klesající na $(1,6; \infty)$, neboť je podílem klesající funkce $e^{\frac{1}{x}}$ a rostoucí funkce x^2 . Současně $|F'(1,6)| = 0,72978 < 1$. Položíme tedy $x_0 = 1,6$ a počítáme $x_{i+1} = F(x_i)$ pro $i = 0, 1, \dots$. Výsledek: $x_7 = 1,76656$ je aproximací $\hat{x}$ s chybou, menší než 0,01.

7. $f(x) = 0 \iff \ln x = \frac{x-4}{3} \implies$ rovnice má dva kořeny $x^{(1)} \doteq 0,2$, $x^{(2)} \doteq 12$. $f(x) = 0 \iff x = 3 \ln x + 4 \equiv F_1(x)$ a $x = e^{(x-4)/3} \equiv F_2(x)$. $|F'_1(x)| = \frac{3}{x} < 1 \iff x > 3$ a $|F'_2(x)| = \frac{1}{3}e^{(x-4)/3} < 1 \iff x < 3 \ln 3 + 4 = 7,2958$. Tedy $x(1) \doteq 0,29031$ je vypočteno třemi kroky iterace $x_0 = 0,2$, $x_{i+1} = e^{(x_i-4)/3}$ a $x(2) \doteq 11,26539$ je vypočteno šesti kroky iterace $x_0 = 12$, $x_{i+1} = 3 \ln x_i + 4$ pro $i = 0, 1, \dots$.

8. $f(x) = 0 \iff e^x = \frac{x}{2} + 2 \implies$ rovnice má dva kořeny $x^{(1)} \doteq -4$, $x^{(2)} \doteq 1$. $f(x) = 0 \iff x = 2e^x - 4 \equiv F_1(x)$ a $x = \ln(2 + \frac{x}{2}) \equiv F_2(x)$. Pak $|F'_1(x)| = 2e^x < 1 \iff x < \ln 0,5 = -0,69315$ a $|F'_2(x)| = \frac{1}{|4+x|} < 1 \iff x > -3$ nebo $x < -5$. Tedy $x(1) \doteq -3,96195$ je vypočteno čtyřmi kroky iterace $x_0 = 4$, $x_{i+1} = 2e^{x_i} - 4$ a $x(2) \doteq 0,89509$ je vypočteno šesti kroky iterace $x_0 = 1$ a $x_{i+1} = \ln(2 + x_i/2)$ pro $i = 0, 1, \dots$.

9. $f(x) = 0 \iff 2,2x = 2^x \implies$ rovnice má dva kořeny $x^{(1)} \doteq 1$, $x^{(2)} \doteq 2,1$. $f(x) = 0 \iff x = \frac{e^{x \cdot \ln 2}}{2,2} \equiv F_1(x)$ a $x = \frac{\ln(2,2x)}{\ln 2} \equiv F_2(x)$. Pak $|F'_1(x)| < 1 \iff x < 1,66627$ a $|F'_2(x)| < 1 \iff x > 1,44270$. Tedy $x^{(1)} \doteq 0,78216$ je vypočteno devíti kroky iterace $x_0 = 1$, $x_{i+1} = \frac{e^{x_i \cdot \ln 2}}{2,2}$ a

$x^{(2)} \doteq 2,40003$ je vypočteno jedenácti kroky iterace $x_0 = 2,1$, $x_{i+1} = \frac{\ln(2,2x_i)}{\ln 2}$ pro $i = 0, 1, \dots$

10. $f(x) = 0 \iff \ln(x) = \frac{5}{8}x - 1 \implies$ rovnice má dva kořeny $x^{(1)} \doteq 0,5$, $x^{(2)} \doteq 4$. $f(x) = 0 \iff x = e^{\frac{5}{8}x-1} \equiv F_1(x)$ a $x = \frac{8}{5}(\ln x + 1) \equiv F_2(x)$. Pak $|F'_1(x)| < 1 \iff x < 2,352$ a $|F'_2(x)| < 1 \iff x > 1,6$. Tedy $x^{(1)} \doteq 0,504$ je vypočteno třemi kroky iterace $x_0 = 0,5$, $x_{i+1} = e^{\frac{5}{8}x_i-1}$ a $x^{(2)} \doteq 3,68860$ je vypočteno osmi kroky iterace $x_0 = 4$, $x_{i+1} = 1,6(\ln x_i + 1)$ pro $i = 0, 1, \dots$

11. $f(x) = 0 \iff x = \sin x + 0,25 \implies$ rovnice má 1 kořen $\hat{x} \doteq 1,2$. Protože $|F'(x)| = \cos x < 1$ pro $x \in (1, \pi/2)$, získáme aproximaci 1,171232 po desíti krocích iterace $x_0 = 1,2$, $x_{i+1} = \sin x_i + 0,25$ s chybou, menší než $1e-5$.

12. $f(x) = 0 \iff x^3 = x + 5 \implies$ rovnice má 1 kořen $\hat{x} \doteq 2$. $f(x) = 0 \iff x = (x + 5)^{\frac{1}{3}} \equiv F(x)$ a $|F'(x)| = \frac{1}{3}(x + 5)^{-\frac{2}{3}} < 0,101$ pro $x > 1$, vznikne aproximace 1,90423 s chybou, menší než $1e-3$ po třech krocích iterace $x_0 = 2$, $x_{i+1} = (1 + x_i)^{\frac{1}{3}}$ pro $i = 0, 1, \dots$

13. $f(x) = 0 \iff x = \ln(x + 2) \implies$ rovnice má 2 kořeny $x^{(1)} \doteq 2$ a $x^{(2)} \doteq -1,5$. $f(x) = 0 \iff x = \ln(x + 2) \equiv F_1(x)$ a $x = e^x - 2 \equiv F_2(x)$. Protože $|F'_1(x)| = \frac{1}{|x+2|} < 1 \iff x > -1$ a $|F'_2(x)| = e^x < 1 \iff x < 0$, vznikne aproximace 1,14622 kořene $x^{(1)}$ po devíti krocích iterace $x_0 = 2$, $x_{i+1} = \ln(x_i + 2)$ a aproximace $-1,84140$ kořene $x^{(2)}$ po šesti krocích iterace $x_0 = -1,5$, $x_{i+1} = e^{x_i} - 2$ s chybou, menší než $1e-4$.

14. $f(x) = 0 \iff \arccos x = \sqrt{x + 1} \implies$ rovnice má 1 kořen $\hat{x} \doteq 0,5$. Protože $f(x) = 0 \iff x = \cos \sqrt{x + 1} \equiv F(x)$ a $|F'(x)| = \frac{\sin \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}} < \frac{1}{2}$ pro $x > 0$, vznikne aproximace 0,383975 s chybou, menší než $1e-3$ po jedenácti krocích iterace $x_0 = 0,5$, $x_{i+1} = \cos \sqrt{x_i + 1}$ pro $i = 0, 1, \dots$

15. $f(x) = 0 \iff \ln x = \frac{1}{x^2+1} \implies$ rovnice má 1 kořen $\hat{x} \doteq 1,2$. Protože $f(x) = 0 \iff x = e^{\frac{1}{x^2+1}} \equiv F(x)$ a $|F'(x)| = \frac{2xe^{\frac{1}{x^2+1}}}{(x^2+1)^2}$ je klesající pro $x \in (1, \infty)$ a $|F'(1)| = \frac{\sqrt{e}}{2} < 1$, vznikne aproximace 1,40148 s chybou, menší než $1e-3$ po devíti krocích iterace $x_0 = 1,2$, $x_{i+1} = e^{\frac{1}{x_i^2+1}}$ pro $i = 0, 1, \dots$

16. $f(x) = 0 \iff \ln x = 1 - \frac{x}{24} \implies$ rovnice má 1 kořen $\hat{x} \doteq 2,4$. Protože $f(x) = 0 \iff x = e^{1-\frac{x}{24}} \equiv F(x)$ a $|F'(x)| = \frac{e^{1-\frac{x}{24}}}{24} < \frac{e}{24} < 1$ pro $x > 0$, vznikne aproximace 2,45406 s chybou, menší než $1e-4$ po čtyřech krocích iterace $x_0 = 2,4$, $x_{i+1} = e^{1-\frac{x_i}{24}}$ pro $i = 0, 1, \dots$

17. $f(x) = 0 \iff x^2 - 1 = \arctg x \implies$ rovnice má 2 kořeny $x^{(1)} \doteq -0,5$ a $x^{(2)} \doteq 1,6$. $f(x) = 0 \iff x = \frac{\arctg x}{x-1} - 1 \equiv F_1(x)$. Pro $x \in (-1, 0)$ platí $0 < -\arctg x < -x$ a tedy $F'_1(x) = \frac{x-1-\arctg x(1+x^2)}{(1+x^2)(x-1)^2} > \frac{1}{(x-1)(1+x^2)} > -1$ a $F'_1(x) < \frac{x-1-x(1+x^2)}{(x-1)^2(1+x^2)} = \frac{-x^3-1}{(x-1)^2(1+x^2)} < 0$. Tedy $|F'_1(x)| < 1$ pro $x \in (-1, 0)$.

$f(x) = 0 \iff x = \sqrt{1 + \operatorname{arctg} x} \equiv F_2(x)$ a $|F'_2(x)| = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{1+\operatorname{arctg} x}} < \frac{1}{2}$ pro $x > 0$. Tedy po pěti krocích iterace $x_0 = -0,5$, $x_{i+1} = \frac{\operatorname{arctg} x_i}{x_i - 1} - 1$ získáme aproximaci $-0,65064$ kořene $x^{(1)}$ s chybou menší než $1e-3$ a podobně po čtyřech krocích iterace $x_0 = 1,6$, $x_{i+1} = \sqrt{1 + \operatorname{arctg} x_i}$ získáme aproximaci $1,39619$ kořene $x^{(2)}$.

18. $f(x) = 0 \iff \operatorname{arctg} x = 1 - 2x \implies$ rovnice má 1 kořen $\hat{x} \doteq 0,3$. Protože $f(x) = 0 \iff x = \frac{1 - \operatorname{arctg} x}{2} \equiv F(x)$ a $|F'(x)| = \frac{1}{2(x^2+1)} < 0,5$ pro $x > 0$, získáme aproximaci $0,33736$ kořene $\hat{x}$ po desíti krocích iterace $x_0 = 0,3$, $x_{i+1} = \frac{1 - \operatorname{arctg} x_i}{2}$ pro $i = 0, 1, \dots$ s chybou, menší než $1e-4$.

19. $f(x) = 0 \iff \operatorname{arctg} x = 0,4x + 0,2 \implies$ rovnice má 3 kořeny, největší $\hat{x} \doteq 3$. Metoda poskytne aproximaci $\hat{x} = 2,462693$ s chybou, menší než $1e-5$ po třech krocích.

20. $f(x) = 0 \iff e^{-x} = 4 - x^2 \implies$ rovnice má 2 kořeny, největší $\hat{x} \doteq 2$. Metoda poskytne aproximaci $\hat{x} = 1,9646356$ s chybou menší než $1e-6$ po třech krocích.

21. $f(x) = 0 \iff x^2 = \operatorname{arctg} x \implies$ rovnice má 2 kořeny, největší $\hat{x} \doteq 0,8$. Metoda poskytne aproximaci $\hat{x} = 0,83361$ s chybou, menší než $1e-3$ po třech krocích.

22. $f(x) = 0 \iff \log x = 7 - 2x \implies$ rovnice má 1 kořen $\hat{x} \doteq 2,8$. Metoda poskytne aproximaci $\hat{x} = 3,789278$ s chybou, menší než $1e-5$ po třech krocích.

23. $f(x) = 0 \iff x^3 = 3(x + \frac{2}{3})^2 + \frac{26}{3} \implies$ rovnice má 1 kořen $\hat{x} \doteq 4,3$. Metoda poskytne aproximaci $\hat{x} = 4,41780209$ s chybou, menší než $1e-6$ po třech krocích.

24. $f(x) = 0 \iff x^3 = x + 5 \implies$ rovnice má 1 kořen $\hat{x} \doteq 1,8$. Metoda poskytne aproximaci $\hat{x} = 1,90416$ s chybou, menší než $1e-3$ po třech krocích.

25. Newtonova metoda poskytne aproximaci $3,0304917$ kořene $\hat{x} \in (3; 3,1)$ pro nultou aproximaci $x_0 = 3,1$ s chybou, menší než $1e-6$ po třech krocích.

26. $f(x) = 0 \iff x - 0,25 = \sin x \implies$ rovnice má 1 kořen $\hat{x} \doteq 1,3$. Fourierovy podmínky jsou splněny na intervalu $\langle 1; 1,5 \rangle$ pro nultou aproximaci $x_0 = 1,5$. Metoda poskytne aproximaci $1,171230$ s chybou, menší než $1e-5$ po čtyřech krocích.

27. $f(x) = 0 \iff e^x = x^2 - 1 \implies$ rovnice má 1 kořen $\hat{x} \doteq -1,1$. Fourierovy podmínky jsou splněny na intervalu $\langle -1,5; -1 \rangle$ pro nultou aproximaci $x_0 = -1,5$. Metoda poskytne aproximaci $-1,147758$ s chybou, menší než $1e-4$ po čtyřech krocích.

28. $f(x) = 0 \iff \ln x = \frac{x-4}{3} \implies$ rovnice má 2 kořeny, největší kladný kořen je $\hat{x} \doteq 11$. Fourierovy podmínky jsou splněny na intervalu $\langle 10; 12 \rangle$ pro nultou aproximaci $x_0 = 12$. Metoda poskytne aproximaci $11,26514$ s chybou, menší než $1e-4$ po třech krocích.

29. $f(x) = 0 \iff e^x = x + 10 \implies$ rovnice má 2 kořeny, největší je $\hat{x} \doteq 2,5$. Fourierovy podmínky jsou splněny na intervalu $\langle 2, 3 \rangle$ pro nultou aproximaci $x_0 = 3$. Metoda poskytne aproximaci 2,5279632 s chybou, menší než $1e-6$ po pěti krocích.

Kapitola 2

2.1. Gaussova eliminační metoda a Gaussova eliminační metoda s částečným výběrem hlavních prvků

1. a) $h(A) = 2 < h(A|b) = 3$
b) $h(A) = 2 = h(A|b)$, $x = [-2/3 - t/3; 3 - t; t]^\top$ pro všechna $t \in \Re$
Systém n rovnic $Ax = b$ pro n neznámých má 1 řešení, když $h(A) = h(A|b) = n$, má nekonečně mnoho řešení, když $h(A) = h(A|b) < n$ a nemá žádné řešení, když $h(A) < h(A|b)$.

2. Daný systém rovnic není řešitelný Gaussovou eliminační metodou, protože matice $A^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ je singulární a je řešitelný Gaussovou eliminační metodou s částečným výběrem hlavních prvků, protože jeho matice soustavy je regulární. Obecně systém rovnic $Ax = b$ se čtvercovou maticí A řádu n je

a) řešitelný Gaussovou eliminační metodou právě když všechny matice

$$A^{(1)} = [a_{11}], A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \dots, A^{(n)} = A$$

jsou regulární a

b) řešitelný Gaussovou eliminační metodou s částečným výběrem hlavních prvků právě když matice A je regulární.

3. $x = [-19573,2789; 12498,0340; -453,3810]^\top$,

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3,6667 & 1 & 0 \\ -15,3333 & 16 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 & 1,2 & 20,1 \\ 0 & 0,7 & 19,3994 \\ 0 & 0 & -2,0911 \end{bmatrix}$$

4. a) $x = [2; 4; 3]^\top$, b) $x = [1; 2; 3]^\top$, c) $x = [-0,6379; -1,1897; 2,6897; 0,9655]^\top$,
d) $x = [-3,0136; 4,9900; 2,0008]^\top$.

5. a) Systém rovnic není řešitelný Gaussovou eliminační metodou a matice soustavy nemá LU-rozklad. Řešením Gaussovou eliminační metodou s

částečným výběrem hlavních prvků je vektor $x = [1; 1; 1]^\top$.

b) $x = [0; 1]^\top$ je řešení Gaussovou eliminací, $x = [1; 1]^\top$ je řešení Gaussovou eliminací s částečným výběrem, $A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 100000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,00001 & 1 \\ 0 & -99999 \end{bmatrix}$,

V c) a d) jsou řešení oběma metodami stejná.

$$\text{c) } x = [0,25; 4]^\top, A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3,96 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0,25 \\ 0 & 0,02 \end{bmatrix},$$

$$\text{d) } x = [2; 3; 4]^\top, A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,4625 & 1 & 0 \\ -0,0147 & -0,6085 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,175 & -1,006 & -0,032 \\ 0 & 1,7467 & -1,0628 \\ 0 & 0 & 1,4789 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{6.} \ x = [-2,1003; 1,8441; 1,8940]^\top, y = [3,5629; 3,6189; -3,6109]^\top.$$

$$\mathbf{7.} \ \text{a) } \begin{bmatrix} 0,615 & -0,077 & -0,385 \\ -0,077 & 0,385 & -0,077 \\ -0,385 & -0,077 & 0,615 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} -10 & 20 & -10 \\ 20 & -190 & 160 \\ -10 & 160 & -140 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 0,504 & -0,155 & 0,257 \\ -0,155 & 0,465 & -0,298 \\ 0,257 & -0,298 & 0,497 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 0,048 & -0,842 & -0,955 & -0,477 \\ -0,842 & 1,296 & -1,469 & -0,734 \\ -0,955 & -1,469 & -0,998 & -0,499 \\ -0,477 & -0,734 & -0,499 & 0,251 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} 0,379 & 0,517 & -0,138 & -0,035 \\ 0,517 & 2,069 & -0,552 & -0,138 \\ -0,138 & -0,552 & 0,414 & 0,103 \\ -0,035 & -0,138 & 0,103 & 0,276 \end{bmatrix}$$

2.2. Symetrické pozitivně definitní matice, Choleského rozklad, Choleského metoda

1. Matice a) - e) jsou symetrické pozitivně definitní, protože jsou symetrické a v jejich LU-rozkladu má horní trojúhelníková matice U všechny prvky v hlavní diagonále kladné. Jejich Choleského rozklady jsou součiny $U^\top U$ pro

$$\begin{aligned} \text{a) } U &= \begin{bmatrix} 1,732 & 0 & 0 \\ 0,577 & 1,633 & 0 \\ 1,155 & 0,204 & 1,257 \end{bmatrix} & \text{b) } U &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,289 & 0 \\ 0,333 & 0,289 & 0,075 \end{bmatrix} \\ \text{c) } U &= \begin{bmatrix} 1,414 & 0 & 0 & 0 \\ -0,707 & 1,225 & 0 & 0 \\ 0 & -0,817 & 1,155 & 0 \\ 0 & 0 & -0,866 & 1,118 \end{bmatrix} & \text{d) } U &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1,937 & 0 & 0 \\ -0,5 & -0,129 & 1,932 & 0 \\ 0 & -0,516 & -0,552 & 1,852 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e) \ U &= \begin{bmatrix} 1,414 & 0 & 0 \\ 0 & 1,732 & 0 \\ -0,707 & 1,155 & 1,472 \end{bmatrix} & f) \ U &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1,323 & 0 \\ 0,5 & 0,567 & 2,104 \end{bmatrix} \\
g) \ U &= \begin{bmatrix} 1,414 & 0 & 0 \\ -0,707 & 1,225 & 0 \\ 0 & -0,817 & 1,155 \end{bmatrix} & h) \ U &= \begin{bmatrix} 2,236 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,162 & 0 & 0 \\ 4,472 & 1,581 & 3,162 & 0 \\ 2,236 & 0 & 3,162 & 7,071 \end{bmatrix} \\
i) \ U &= \begin{bmatrix} 2,236 & 0 & 0 \\ 0 & 3,162 & 0 \\ 4,472 & 1,581 & 3,162 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. a) $x = [1; 1; 1]^\top$, b) $x = [1,250; 0,417; 0,333]^\top$, c) $x = [-1; 2; 0]^\top$, d) $x = [0; 0,091; 0,455]^\top$.

3. Matice $A^\top A$ je symetrická, neboť $(A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A$. Je-li x nenulový vektor, pak je nenulový i vektor Ax , neboť matice A je regulární. Pak

$$x^\top (A^\top A) x = (x^\top A^\top) Ax = (Ax)^\top Ax = \|Ax\|_2^2 > 0.$$

2.3. Číslo podmíněnosti matice

1. $C(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ pro libovolnou normu matic $\|\cdot\|$. Pro systém rovnic $Ax = b$ s regulární maticí A a s vektorem pravých stran b s chybou e_b splňuje chyba e_x vektoru řešení x nerovnost

$$\frac{\|e_x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|e_b\|}{\|b\|}$$

pro libovolnou normu vektorů $\|\cdot\|$ a jí přidruženou normu matic $\|\cdot\|$, $C(B) = 3, C(D) = 42,75$

2. $C(A) = 48/11$ pro $\|\cdot\|_\infty$ a $C(A) = 45/11$ pro $\|\cdot\|_1$

3. a) $C(A) = 24,407$; $C(B) = 11,8$ b) $C(A) = 81,9$; $C(B) = 89,25$

4. $C(A) = 602$ pro obě normy, $x^{(1)} = [123; -60,88]^\top$, $x^{(2)} = [130; -64,4]^\top$.

2.4. Iterační Jacobiova, Gaussova-Seidelova a relaxační metoda

1. a) $\hat{x} = [0,5; 1; 1,5]^\top$, b) Soustava rovnic v pořadí 2, 3, 1 je silně diagonálně dominantní, proto obě iterační metody konvergují.

c) Jacobi: $x^{(1)} = [0,15; -0,208; 0,813]^\top$, $x^{(2)} = [0,640; 0,456; 0,701]^\top$,
Gauss-Seidel: $x^{(1)} = [0,15; -0,221; 0,693]^\top$, $x^{(2)} = [0,585; 0,321; 1,086]^\top$

2. a) $\hat{x} = [1; 1; 1]^\top$. Po záměně prvních dvou rovnic bude matice systému ryze diagonálně dominantní a obě požadované metody budou konvergovat.

Jacobiova metoda: $x^{(1)} = [1,5; 0,8; 1]^\top$, $x^{(2)} = [1,04; 0,85; 0,825]^\top$, Gaussova-Seidelova metoda: $x^{(1)} = [1,5; 0,35; 0,713]^\top$, $x^{(2)} = [1,216; 0,791; 0,894]^\top$.

b) $\hat{x} = [1,039; 0,805; 0,886]^\top$. Při pořadí rovnic 3, 2, 1 bude matice systému ryze diagonálně dominantní a obě požadované metody budou konvergovat.

Jacobiova metoda: $x^{(1)} = [0,969; 1,656; 0,094]^\top$, $x^{(2)} = [1,762; 1,137; 1,285]^\top$,

Gaussova-Seidelova metoda: $x^{(1)} = [0,969; 1,172; 1,043]^\top$, $x^{(2)} = [1,164; 0,683; 0,872]^\top$.

3. a) $x^{(5)} = [-0,4517; 0,1198; 0,6347]^\top$, b) $x^{(3)} = [-0,497; 0,093; 0,636]^\top$,
 $\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty = 0,133$.

4. $x = [0,787; 0,582; 0,386; 0,193]^\top$

5. $x^{(1)} = [-0,2500; 0,0417; 0,3889]^\top$, $x^{(2)} = [-0,3576; -0,0700; 0,4992]^\top$,
 $x^{(3)} = [-0,3573; -0,1069; 0,5237]^\top$, $\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty = 0,0368$, konverguje.

6. a) $x = [0,34; 0,27; -0,54; 0,70]^\top$, b) $x^{(3)} = [0,342; 0,273; -0,541; 0,698]^\top$.

7. Jacobiova metoda :

$x^{(1)} = [1; 3; 5]^\top$, $\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = 5$

$x^{(2)} = [5; -3; -3]^\top$, $\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty = 8$

$x^{(3)} = [1; 1; 1]^\top$, $\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty = 4$

$x^{(4)} = [1; 1; 1]^\top$, $\|x^{(4)} - x^{(3)}\|_\infty = 0$, konverguje

Gaussova-Seidelova metoda :

$x^{(1)} = [1; 2; -1]^\top$, $\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = 2$

$x^{(2)} = [-5; 9; -3]^\top$, $\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty = 7$

$x^{(3)} = [-23; 29; -7]^\top$, $\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty = 20$

$x^{(4)} = [-71; 81; -15]^\top$, $\|x^{(4)} - x^{(3)}\|_\infty = 52$, diverguje

8. Jacobiova metoda : $x^{(3)} = [-0,097; 0,381; 0,605; -0,105]^\top$

Gaussova-Seidelova metoda : $x^{(2)} = [-0,105; 0,384; 0,598; -0,099]^\top$

9. Jacobiova metoda : $x^{(4)} = [0,889; 0,133; 0,396; -0,714]^\top$
 Gaussova-Seidelova metoda : $x^{(3)} = [0,889; 0,123; 0,416; -0,715]^\top$

10. Jacobiova metoda : $x^{(5)} = [0,330; 0,504; 2,230; 1,004]^\top$
 Gaussova-Seidelova metoda : $x^{(4)} = [0,312; 0,522; 2,271; 1,029]^\top$

11. Jacobiova metoda : $x^{(6)} = [0,4258; 0,6055; 0,1055]^\top$
 Gaussova-Seidelova metoda : $x^{(5)} = [0,4282; 0,6071; 0,1071]^\top$
 Relaxační Gaussova-Seidelova metoda : $x^{(4)} = [0,4295; 0,6073; 0,1071]^\top$

Kapitola 3

1a) průnik dvou parabol, dva kořeny, např. pro volbu $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [1,2; 1,2]$ vychází $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [1,1924; 1,2218], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [1,1924; 1,2216]$ tedy kořen $\hat{x} \doteq 1,192, \hat{y} \doteq 1,222$.

1b) průnik hyperboly a elipsy, dva kořeny, např. pro volbu $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [1,7; -4]$ vychází $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [1,7461; -3,9377], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [1,7459; -3,9344], [x^{(3)}, y^{(3)}] = [1,7459; -3,9344]$ tedy kořen $\hat{x} \doteq 1,746, \hat{y} \doteq -3,934$.

1c) průnik dvou parabol, dva kořeny, např. pro volbu $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [0,9; 0,3]$ vychází $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [0,8949; 0,2668], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [0,8937; 0,2662], [x^{(3)}, y^{(3)}] = [0,8937; 0,2662]$ tedy kořen $\hat{x} \doteq 0,894, \hat{y} \doteq 0,266$.

1d) průnik paraboly a elipsy, dva kořeny, např. pro volbu $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [2; 0,25]$ vychází $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [1,9062; 0,3125], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [1,9007; 0,3112], [x^{(3)}, y^{(3)}] = [1,9006; 0,3112]$ tedy kořen $\hat{x} \doteq 1,901, \hat{y} \doteq 0,311$.

1e) průnik dvou hyperbol, dva kořeny, např. pro volbu $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [1,75; 1,45]$ vychází $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [1,7172; 1,3967], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [1,7167; 1,3953], [x^{(3)}, y^{(3)}] = [1,7167; 1,3953]$ tedy kořen $\hat{x} \doteq 1,717, \hat{y} \doteq 1,395$.

1f) průnik paraboly a hyperboly, dva kořeny, první zřejmě $[0, 0]$ a druhý například pro volbu $[x^{(0)}, y^{(0)}] = [1,8; 1,5]$ vychází $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [1,6181; 0,9670], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [1,5495; 0,8468], [x^{(3)}, y^{(3)}] = [1,5437; 0,8393] = [x^{(4)}, y^{(4)}]$ tedy kořen $\hat{x} \doteq 1,544, \hat{y} \doteq 0,839$

2a) průnik dvou parabol, dva kořeny, v prvním kvadrantu $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [1,2931; 1,8962], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [1,2923; 1,8933]$, odtud ihned $\hat{x} \doteq 1,29, \hat{y} \doteq 1,89$, druhý z kořenů přímo z obrázku $[-0,5; 0]$.

2b) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [1,3143; 1,7582], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [1,3089; 1,7640]$, odtud ihned
 $\hat{x} \doteq 1,31, \quad \hat{y} \doteq 1,76$.

2c) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [2,1217; 0,5004], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [2,1251; 0,4928]$, odtud ihned
 $\hat{x} \doteq 2,13, \quad \hat{y} \doteq 0,49$.

2d) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [1,0252; 1,1087], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [1,0234; 1,1039]$, odtud ihned
 $\hat{x} \doteq 1,02, \quad \hat{y} \doteq 1,10$.

2e) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [0,5140; 0,9999], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [0,5002; 0,9999], [x^{(3)}, y^{(3)}] = [0,5000; 1,0000]$, odtud ihned $\hat{x} \doteq 0,50, \quad \hat{y} \doteq 1,00$.

2f) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [1,2349; 1,6610], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [1,2343; 1,6615]$, odtud ihned
 $\hat{x} \doteq 1,23, \quad \hat{y} \doteq 1,66$.

3a) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [-0,333333; 0,333333], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [-0,335771; 0,285215]$

3b) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [-0,547586; 0,577668], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [-0,546948; 0,578713]$

3c) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [2,341117; 1,863706], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [2,200044; 1,790363]$

3d) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [0,653846; 1,519231], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [0,669343; 1,493405]$

3e) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [1,768984; 0,564171], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [1,769292; 0,565198]$

3f) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [1,490948; 1,167598], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [1,478058; 1,176513]$

3g) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [1,122727; 1,504545], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [1,129190; 1,508324]$

3h) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [1,005405; 0,032432], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [0,999508; 0,000526]$

3i) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [1,548794; 0,023338], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [1,538359; 0,032434]$

3j) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [-8,043804; 0,997622], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [-8,000005; 1]$,

další kořen $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [0,388317; 3,173540], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [0,362494; 3,061857]$

3k) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [-0,783333; 1,300000], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [-0,774645; 1,265385]$

3l) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [1,585868; 0,257389], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [1,582605; 0,252314]$

3m) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [-0,231592; 1,431592], \quad [x^{(2)}, y^{(2)}] = [-0,231264; 1,431264]$

3n) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [0,805480; 0,395749], \quad [x^{(2)}, y^{(2)}] = [0,805503; 0,395774]$

3o) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [0,450627; 0,050157], \quad [x^{(2)}, y^{(2)}] = [0,450688; 0,049558]$

3p) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [0,633929; 0,723214], \quad [x^{(2)}, y^{(2)}] = [0,637107; 0,718821]$

3q) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [0,687873; 0,239928], \quad [x^{(2)}, y^{(2)}] = [0,686595; 0,239120].$

4a) průnik kružnice a kubické paraboly, dva symetrické kořeny,
 $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [0,793701; 0,714143], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [0,893844; 0,608308], [x^{(3)}, y^{(3)}] = [0,847308; 0,448378], [x^{(4)}, y^{(4)}] = [0,765388; 0,531102],$ kořen $\hat{x} \doteq 0,826031$,
 $\hat{y} \doteq 0,563624$, druhý z kořenů je $[-\hat{x}, -\hat{y}]$.

4b) průnik elipsy a paraboly, dva symetrické kořeny,
 $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [1,420000; 1,982222], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [1,402911; 1,980321], [x^{(3)}, y^{(3)}] = [1,408992; 1,981866], [x^{(4)}, y^{(4)}] = [1,407296; 1,981331],$ řešení $\hat{x} \doteq 1,407640$,
 $\hat{y} \doteq 1,981451$, druhý z kořenů má souřadnice $[\hat{x}, -\hat{y}]$.

4c) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [0,912500; 0,917188], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [0,967390; 0,968013], [x^{(3)}, y^{(3)}] = [0,987290; 0,987388], [x^{(4)}, y^{(4)}] = [0,994968; 0,994883],$ přesné řešení $\hat{x} = 1$,
 $\hat{y} = 1$.

4d) $[x^{(1)}, y^{(1)}] = [0,337500; 0,496875], [x^{(2)}, y^{(2)}] = [0,292918; 0,495036], [x^{(3)}, y^{(3)}] = [0,280697; 0,496829], [x^{(4)}, y^{(4)}] = [0,277280; 0,499668],$ kořen $\hat{x} \doteq 0,275892$,
 $\hat{y} \doteq 0,499211$.

Kapitola 4

4.1. Lagrangeova a Hermiteova interpolace

1. a) Lagrangeův tvar: $P(x) = -2(x - 3) + (x - 1)$,
 Newtonův tvar: $P(x) = 4 - (x - 1)$;
 b) Lagrangeův tvar: $P(x) = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$,
 Newtonův tvar: $P(x) = y_0 + \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x - x_0)$.
2. a) Lagrangeův tvar:

- $$L(x) = -\frac{1}{8}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{1}{4}x(x-3)(x-4) -$$
- $$-\frac{5}{3}x(x-2)(x-4) + \frac{7}{8}x(x-2)(x-3),$$
- Newtonův tvar:
- $$N_3(x) = 3 - x + \frac{5}{3}x(x-2) - \frac{2}{3}x(x-2)(x-3), \quad x \in \langle 0, 4 \rangle;$$
- b) Lagrangeův tvar:
- $$L(x) = \frac{2}{15}x(x-2)(x-3)(x-4) - \frac{1}{8}(x+1)(x-2)(x-3)(x-4) +$$
- $$+ \frac{1}{12}(x+1)x(x-3)(x-4) - \frac{5}{12}(x+1)x(x-2)(x-4) +$$
- $$+ \frac{7}{40}(x+1)x(x-2)(x-3);$$
- Newtonův tvar:
- $$N(x) = N_3(x) - \frac{3}{20}x(x-2)(x-3)(x-4), \quad x \in \langle -1, 4 \rangle.$$
3. a) $N_1(x) = 1 - 0,4597x$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, abs. chyba $\doteq -0,2397$,
b) $N_2(x) = N_1(x) - 0,2484x(x-1)$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$, abs. chyba $\doteq -0,0534$,
c) $N_3(x) = N_2(x) + 0,1465x(x-1)(x-2)$, $x \in \langle 0, 3 \rangle$, abs. chyba $\doteq 0,0016$,
d) $N_4(x) = N_3(x) - 0,0146x(x-1)(x-2)(x-3)$, $x \in \langle 0, 4 \rangle$, abs. chyba $\doteq 0,00974$.
4. a) $N_3(x) = 2 + x + 4x(x-1) + x(x-1)(x-2)$,
b) $N_4(x) = 2 + x + 4x(x-1) + x(x-1)(x-2) + 1,42857\bar{3}x(x-1)(x-2)(x-5)$.
5. $N(x) = 10 + 0,0476(x-100) - 0,0001(x-100)(x-121)$, $\sqrt{115} \doteq N(115) = 10,7230$, takže absolutní chyba je $\sqrt{115} - 10,7230 \doteq 0,0008$.
6. $N(x) = -0,14794 + 0,04401(x-4) - 0,00134(x-4)(x-8)$,
 $N(x) \doteq \log x - \frac{x-1}{x} \Rightarrow \log x \doteq N(x) + \frac{x-1}{x}$. Odtud $\log(5,25) \doteq 0,72120$, absolutní chyba je $-0,00104$.
7. $N(x) = 1,58740 + 0,12258(x-4) - 0,00772(x-4)(x-5)$,
 $\sqrt[3]{4,8} \doteq 1,68670$, takže absolutní chyba je $0,00017$.
8. $N(x) = 1 - 1,171572x - 3,313712x(x-0,25)$,
 $\cos \frac{\pi}{6} \doteq 0,850762$ a absolutní chyba je $0,015263$.
9. a) $s(x)$ je přirozený kubický splajn.
b) $s(x)$ je kubický splajn a není přirozený kubický splajn.
10. $H(x) = 4 - \frac{5}{9}(x+1)^2 + \frac{19}{27}(x+1)^2(x-2)$, definiční podmínky jsou $H(-1) = 4$, $H'(-1) = 0$, $H(2) = -1$, $H'(2) = 3$ a $f(1) \doteq H(1) = -1,0370$.

11. a) $H(x) = -(x+1) + 2(x+1)^2x - \frac{31}{36}(x+1)^2x^2 + \frac{11}{27}(x+1)^2x^2(x-2),$

b) $s(x) = \begin{cases} -(x+1) + 2(x+1)^2x & \text{pro } x \in \langle -1, 0 \rangle, \\ -1 + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2(x-2) & \text{pro } x \in \langle 0, 2 \rangle. \end{cases}$

12. $s(x) = \begin{cases} -6x^3 + 8x^2 + x + 2 & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 0,407407x^3 - 2,555556x^2 + 2,888889x + 4,259259 & \text{pro } x \in \langle 1, 4 \rangle, \end{cases}$
a definiční podmínky jsou $s(0) = 2, s'(0) = 1, s(1) = 5, s'(1) = -1,$
 $s(4) = 1, s'(4) = 2.$

13. a) $H(x) = -1 + (x+1)^2 - 2(x+1)^2x + 1,5(x+1)^2x^2 - 1,5(x+1)^2x^2(x-1),$

b) $s(x) = \begin{cases} -2x^3 - 3x^2 & \text{pro } x \in \langle -1, 0 \rangle, \\ -2x^3 + 3x^2 & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle. \end{cases}$

$H(x) = 2,497495 + 1,070737(x-1,5) - 0,494266(x-1,5)^2 +$

14. a) $+0,029528(x-1,5)^2(x-2) + 0,036969(x-1,5)^2(x-2)^2 -$
 $-0,004542(x-1,5)^2(x-2)^2(x-3),$

$f(2,5) = 3,098472, H(2,5) = 3,098540$ a abs. chyba je $-0,000068,$

b) $s(x) = \begin{cases} 0,029522x^3 - 0,641875x^2 + 2,79709x - 0,353556, & x \in \langle 1,5; 2 \rangle, \\ 0,130216x^3 - 1,263540x^2 + 4,075430x - 1,229120, & x \in \langle 2; 3 \rangle, \end{cases}$
a $s(2,5) = 3,096955$ a tedy absolutní chyba je $0,001517.$

$H(x) = x - 1 - 0,3069(x-1)^2 + 0,1138(x-1)^2(x-2) -$

15. a) $-0,0323(x-1)^2(x-2)^2 + 0,0094(x-1)^2(x-2)^2(x-3) -$
 $-0,0021(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2 +$

$+0,0003(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2(x-4),$

$\ln(2,5) = 0,9162907319, H(2,5) = 0,9163289062$ a tedy absolutní
chyba je $-0,0000381743.$

b) $s(x) = \begin{cases} ((0,113706x - 0,534265)(x-1) + 1)(x-1), & x \in \langle 1, 2 \rangle, \\ 0,022403x^3 - 0,251356x^2 + 1,236590x - 0,953829, & x \in \langle 2, 3 \rangle, \\ 0,007969x^3 - 0,125341x^2 + 0,870216x - 0,599130, & x \in \langle 3, 4 \rangle, \end{cases}$

$s(2,5) = 0,916713$ a absolutní chyba je $0,000422.$

16. a) $N(x) = 1,105171 + 1,16232(x - 0,1)$,
 $e^{0,15} = 1,161834243$, $N(0,15) = 1,163287$ a tedy absolutní chyba
je $-0,001452757$.

b)
$$H(x) = 1,105171 + 1,105171(x - 0,1) + 0,571490(x - 0,1)^2 +$$

$$+ 0,193400(x - 0,1)^2 \cdot (x - 0,2),$$

$H(0,15) = 1,1618341$ a tedy absolutní chyba je $0,000000143$.

17. a) $N(x) = 1 + 1 \cdot (x - 1) + \frac{4}{3} \cdot (x - 1)(x - 2)$,

b)
$$H(x) = 1 + 0,3863(x - 1) + 0,6137(x - 1)^2 + 0,1589(x - 1)^2 \cdot (x - 2) +$$

$$+ 0,0405(x - 1)^2 \cdot (x - 2)^2 + 0,0071(x - 1)^2 \cdot (x - 2)^2 \cdot (x - 4),$$

c)
$$s(x) = \begin{cases} 0,1589x^3 - 0,0219x^2 - 0,0466x + 0,9096 & \text{pro } x \in \langle 1, 2 \rangle; \\ 0,4657x^3 - 2,1120x^2 + 4,6310x - 2,5410 & \text{pro } x \in (2, 4). \end{cases}$$

Absolutní chyby aproximací v bodě $3,5$ jsou

a) $f(3,5) - N(3,5) = -0,6863$, b) $f(3,5) - H(3,5) = 0,0030$ a c) $f(3,5) - s(3,5) = 0,0513$.

18.
$$H(x) = 1 - 4,774575(x - 0,5)^2 + 1,581225(x - 0,5)^2(x - 0,7) +$$

$$+ 3,335642(x - 0,5)^2(x - 0,7)^2 - 1,665376(x - 0,5)^2(x - 0,7)^2(x - 1)$$

a absolutní chyba je $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - H(0,75) = -0,000010$.

4.2. Diskrétní metoda nejmenších čtverců

1. $f(x) \doteq 0,25x^2 + 0,85x - 0,25$ a chyba aproximace je $0,6708$.

2. $e^x \doteq 1,14860x + 1,26828$, chyba aproximace je $0,51928$

a absolutní chyba aproximace $e^{0,25}$ je $-0,27140$.

3. Průměrná spotřeba je v obcích $8,5135$ l/100 km a mimo obce $5,8307$ l/100 km.

4. a) $f(x) \doteq -0,043478x + 1,913043$ a b) $f(x) \doteq 0,6x + 2$.

5. $f(x) \doteq -0,1310x^2 - 1,3929x + 0,6667$.

6. $f(x) \doteq 0,897 \cdot \frac{1}{x} + 1,738$, a chyba aproximace je $0,554$.

7. $f(x) \doteq 2,0133 + 1,5732e^{-x}$.

8. $x^2 \doteq 2,674 + 0,057 \sin x - 2,854 \cos x$ a chyba aproximace je $0,282$.

9. $f(x) \doteq 0,035 + 0,105x + 0,925x^2$, chyba aproximace je 0,201 a chyba aproximace funkce $y = x^2$ polynomem f^* je 0,172.

10. $x^2 \doteq -1,339 + 0,713e^x + 0,752e^{-x}$ a chyba aproximace je 0,182.

11. a) $x_1 = \frac{9}{7}$, $x_2 = \frac{4}{7}$, chyba aproximace je 1,069,
b) $x = \frac{16}{30}$, $y = \frac{76}{30}$, chyba aproximace je 0,4472136,
c) $a = 0,75$, $b = 1,25$, $c = 1,875$, $d = 0,375$ a chyba aproximace je 0,5.

12. $|x| \doteq 0,2805x^2 - 0,4891x + 0,1674$ a chyba aproximace je 0,2181.

Kapitola 5

1.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
1	0,25	0,1	0,100312	0,100313	0,100000	0,100314
2	0,50	0,100625	0,101263	0,101265	0,100625	0,101269
3	0,75	0,101891	0,102890	0,102894	0,101891	0,102903
4	1,0	0,103838	0,105257	0,105264	0,103838	0,105282

2.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	0	0	0	0	0
1	0,25	0,0	0,0312500	0,0288086	0	0,0277778
2	0,50	0,0625	0,110352	0,106543	0,0625000	0,104939
3	0,75	0,171875	0,226838	0,222381	0,171875	0,220508
4	1,0	0,316406	0,372530	0,367894	0,316406	0,365950

3.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	2	2	2	2	2
1	0,25	2,0	2,15625	2,16123	2,0	2,16667
2	0,50	2,3125	2,69580	2,71003	2,31250	2,73810
3	0,75	3,01562	3,84430	3,88744	3,01562	3,98352
4	1,0	4,33398	6,15221	6,29464	4,33398	6,59891

4.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	1	2	2	2	2	2
1	1,25	2,12500	2,13603	2,13599	2,12500	2,13566
2	1,50	2,27206	2,29133	2,29128	2,27206	2,29067
3	1,75	2,43711	2,46226	2,46220	2,43711	2,46139
4	2,0	2,61663	2,64580	2,64574	2,61663	2,64479

5.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	1	1	1	1	1
1	0,25	1,25	1,28906	1,28958	1,25000	1,29464
2	0,50	1,57812	1,69262	1,69616	1,57812	1,70918
3	0,75	2,03515	2,27805	2,28847	2,03515	2,31359
4	1,0	2,68456	3,13164	3,15476	2,68456	3,19783

6.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	2	2	2	2	2
1	0,25	2,0	2,01562	2,01044	2,0	2,01575
2	0,50	2,03125	2,09534	2,08509	2,03125	2,09703
3	0,75	2,15820	2,31736	2,30197	2,15820	2,32611
4	1,0	2,46170	2,81070	2,79120	2,46170	2,84533

7.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	2	2	2	2	2	2
1	2,25	2,0	2,01389	2,01388	2,0	2,01315
2	2,50	2,02778	2,05000	2,04999	2,02778	2,04887
3	2,75	2,07500	2,10227	2,10226	2,07500	2,10094
4	3,0	2,13636	2,16666	2,16664	2,13636	2,16522

8.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	1	1	1	1	1
1	0,25	1,25	1,31250	1,31804	1,25000	1,32143
2	0,50	1,6250	1,78320	1,79741	1,62500	1,80613
3	0,75	2,15625	2,45660	2,48393	2,15625	2,50074
4	1,0	2,88281	3,38970	3,43644	2,88281	3,46523

9.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	1	1	1	1	1
1	0,25	1,50	1,62500	1,64843	1,50000	1,66667
2	0,50	2,2500	2,64062	2,71733	2,25000	2,77779
3	0,75	3,37500	4,29101	4,47935	3,37500	4,62965
4	1,0	5,06250	6,97288	7,38394	5,06250	7,71608

10.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	1	1	1	1	1
1	0,25	1,0	1,03093	1,03209	1,0	1,03300
2	0,50	1,06185	1,13588	1,13951	1,06185	1,14450
3	0,75	1,19699	1,35510	1,36673	1,19699	1,38689
4	1,0	1,44115	1,80421	1,85068	1,44115	1,95126

11.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	1	1	1	1	1
1	0,25	1,50	1,53485	1,53663	1,50000	1,53983
2	0,50	2,06970	2,16403	2,16981	2,06970	2,17769
3	0,75	2,73876	2,92648	2,93928	2,73876	2,95401
4	1,0	3,54154	3,86935	3,89341	3,54154	3,91805

12.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	1	1	1	1	1
1	0,25	1,0	0,972350	0,973494	1,0	0,975422
2	0,50	0,944700	0,908477	0,909787	0,944700	0,912587
3	0,75	0,860158	0,825656	0,826632	0,860158	0,829668
4	1,0	0,763210	0,735313	0,735752	0,763210	0,738658

13.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	0	0	0	0	0
1	0,25	0,25	0,246031	0,247400	0,250000	0,246154
2	0,50	0,492062	0,476270	0,479415	0,492062	0,477160
3	0,75	0,709702	0,675926	0,681613	0,709702	0,678802
4	1,0	0,885828	0,831798	0,841391	0,885828	0,838672

14.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	1	1	1	1	1
1	0,25	1,0	1,03125	1,03079	1,0	1,03033
2	0,50	1,06250	1,11879	1,11805	1,06250	1,11663
3	0,75	1,18015	1,25084	1,25002	1,18015	1,24774
4	1,0	1,33903	1,41503	1,41423	1,33903	1,41144

15.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	0	0	0	0	0
1	0,25	0,0	0,0390625	0,0365357	0,0	0,0392551
2	0,50	0,078125	0,173794	0,169316	0,0781250	0,176138
3	0,75	0,267151	0,452389	0,447709	0,267151	0,464837
4	1,0	0,613119	0,978495	0,982700	0,613119	1,04150

16.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	1	1	1	1	1
1	0,25	1,75	1,84375	1,85206	1,75000	1,85714
2	0,50	2,6875	2,92480	2,94611	2,68750	2,95918
3	0,75	3,85938	4,30990	4,35090	3,85938	4,37609
4	1,0	5,32422	6,08456	6,15467	5,32422	6,19783

17.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
1	0,25	- 0,125	- 0,188629	- 0,192589	- 0,125000	- 0,197719
2	0,50	- 0,477258	- 0,648400	- 0,659447	- 0,477258	- 0,673175
3	0,75	- 1,00875	- 1,35300	- 1,37596	- 1,00875	- 1,40347
4	1,0	- 1,79019	- 2,40410	- 2,44629	- 1,79019	- 2,49522

18.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	1	1	1	1	1
1	0,25	1,0	1,03125	1,03175	1,0	1,03226
2	0,50	1,0625	1,13196	1,13316	1,06250	1,13549
3	0,75	1,19531	1,32210	1,32480	1,19531	1,33127
4	1,0	1,41943	1,64230	1,64874	1,41943	1,66409

19.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	1	1	1	1	1
1	0,25	1,0	1,00781	1,00523	1,0	1,00794
2	0,50	1,01562	1,04849	1,04347	1,01562	1,05036
3	0,75	1,08009	1,17060	1,16363	1,08009	1,18329
4	1,0	1,24414	1,49927	1,49995	1,24414	1,60290

20.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	1	1	1	1	1
1	0,25	1,25	1,23125	1,22479	1,25000	1,22753
2	0,50	1,46250	1,42714	1,41430	1,46250	1,41942
3	0,75	1,65718	1,60248	1,58129	1,65718	1,58951
4	1,0	1,84519	1,76560	1,73228	1,84519	1,74512

21.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	1	1	1	1	1
1	0,25	1,0	0,976562	0,982190	1,0	0,968910
2	0,50	0,953125	0,833948	0,838408	0,953125	0,798839
3	0,75	0,742737	0,406852	0,402045	0,742737	0,338218
4	1,0	0,208777	- 0,402143	- 0,411292	0,208777	- 0,457283

22.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	0	0	0	0	0
1	0,25	0,25	0,257812	0,255270	0,250000	0,258065
2	0,50	0,515625	0,548613	0,543819	0,515625	0,550539
3	0,75	0,830077	0,914201	0,907788	0,830077	0,921322
4	1,0	1,23572	1,41686	1,41067	1,23572	1,43737

23.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	1	1	1	1	1
1	0,25	1,0	0,937500	0,923303	1,0	0,941176
2	0,50	0,875000	0,806400	0,792823	0,875000	0,810695
3	0,75	0,720320	0,663260	0,650859	0,720320	0,666852
4	1,0	0,564366	0,526502	0,515246	0,564366	0,528589

24.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	0	0	0	0	0
1	0,25	0,250000	0,195652	0,191423	0,250000	0,197582
2	0,50	0,391304	0,312052	0,305673	0,391304	0,313639
3	0,75	0,480190	0,379183	0,370876	0,480190	0,380239
4	1,0	0,532821	0,410852	0,400699	0,532821	0,411450

25.

i	x_i	y_i^{Eul}	y_i^{Heun}	y_i^{RK}	$y_i^{ImplEul}$	y_i^{Lich}
0	0	0	0	0	0	0
1	0,25	0,0500000	0,0477330	0,0477580	0,0500000	0,0478654
2	0,50	0,0954660	0,0918197	0,0918552	0,0954660	0,0920213
3	0,75	0,137684	0,133166	0,133203	0,137684	0,133404
4	1,0	0,177477	0,172403	0,172438	0,177477	0,172660

Kapitola 6

$$1. \left[\begin{array}{cccc|c} 2,0625 & -1,25 & 0 & 0 & 0 \\ -0,75 & 2,0625 & -1,25 & 0 & 0 \\ 0 & -0,75 & 2,0625 & -1,25 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2,0625 & 5 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 5,34041 \\ 8,81168 \\ 11,33502 \\ 13,41578 \end{array} \right]$$

$$2. \left[\begin{array}{cccc|c} 2,16 & -2 & 0 & 0 & -0,32 \\ -1 & 2,16 & -1 & 0 & -0,47739 \\ 0 & -1 & 2,16 & -1 & -0,71217 \\ 0 & 0 & -1 & 2,16 & -1,06244 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2,16 \\ & & & & -1,58497 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -2,86470 \\ -2,93387 \\ -2,99508 \\ -2,82333 \\ -2,04088 \\ 0 \end{array} \right]$$

$$3. \left[\begin{array}{cccc|c} 2,93750 & -2 & 0 & 0 & 0,46875 \\ -0,91975 & 2 & -1,08025 & 0 & 0,03125 \\ 0 & -0,89695 & 2 & -1,10305 & 0,06250 \\ 0 & 0 & -0,86769 & 2 & 3,49069 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1,62792 \\ 2,15664 \\ 2,57787 \\ 2,86374 \\ 3 \end{array} \right]$$

$$4. \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 & 0,8 \\ -1 & 2,0256 & -1 & 0 & -0,01024 \\ 0 & -1 & 2,1024 & -1 & -0,08192 \\ 0 & 0 & -2 & 2,2304 & 0,52352 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 3,03239 \\ 2,63239 \\ 2,31002 \\ 2,30612 \end{array} \right]$$

$$5. \left[\begin{array}{cccc|c} 0,2 & 0,025 & 0 & 0 & 4,60938 \\ -0,225 & 0,2 & 0,025 & 0 & 0,15625 \\ 0 & -0,225 & 0,2 & 0,025 & 0,20313 \\ 0 & 0 & -0,2 & 0,1375 & -0,0625 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 20 \\ 20,40762 \\ 21,11403 \\ 21,00638 \\ 30,10019 \end{array} \right]$$

$$6. \left[\begin{array}{cccc|c} 0,5 & -0,125 & 0 & 0 & 0,4375 \\ -0,375 & 0,5 & -0,125 & 0 & 0,0625 \\ 0 & -0,375 & 0,5 & -0,125 & 0,0625 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,625 & 0,0625 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1,23311 \\ 1,43243 \\ 1,53041 \\ 1,32432 \end{array} \right]$$

$$7. \left[\begin{array}{cccc|c} 0,002 & -0,105 & 0 & 0 & 0,02 \\ 0,115 & 0,002 & -0,117 & 0 & 0,02 \\ 0 & 0,135 & 0,002 & -0,137 & 0,02 \\ 0 & 0 & 0,163 & 0,002 & 0,185 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1,33514 \\ -0,16505 \\ 1,13855 \\ -0,29200 \\ 1 \end{array} \right]$$

$$8. \left[\begin{array}{cccc|c} 2,04 & -1 & 0 & 0 & 1,008 \\ -1 & 2,04 & -1 & 0 & 0,016 \\ 0 & -1 & 2,04 & -1 & 0,024 \\ 0 & 0 & -1 & 2,04 & 2,032 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1,12725 \\ 1,29158 \\ 1,49158 \\ 1,72725 \\ 2 \end{array} \right]$$

$$9. \left[\begin{array}{cccccc|c} 2,4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0,048 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -0,096 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -0,144 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -0,192 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2,4 & -1,04 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -1,98667 \\ -2,38400 \\ -2,73333 \\ -2,98667 \\ -3,09600 \\ -3,01333 \end{array} \right]$$

$$10. \left[\begin{array}{cccc|c} 2,0125 & -1 & 0 & 0 & 1,25 \\ -1 & 2,025 & -1 & 0 & 0,25 \\ 0 & -1 & 2,0375 & -1 & 0,25 \\ 0 & 0 & -2 & 2,05 & 5,25 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3,60242 \\ 5,99988 \\ 8,29733 \\ 10,65593 \end{array} \right]$$

$$11. \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 & 0,5 \\ -1 & 2,00117 & -1 & 0 & 0,01563 \\ 0 & -1 & 2,00469 & -1 & 0,03125 \\ 0 & 0 & -1 & 2,01055 & 2,04688 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 3,09770 \\ 2,84770 \\ 2,58541 \\ 2,30400 \\ 2 \end{array} \right]$$

$$12. \left[\begin{array}{cccc|c} 2,0016 & -1 & 0 & 0 & 0,016 \\ -1 & 2,0064 & -1 & 0 & 0,032 \\ 0 & -1 & 2,0144 & -1 & 0,048 \\ 0 & 0 & -2 & 2,0256 & -0,336 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ -0,06208 \\ -0,14027 \\ -0,25135 \\ -0,41405 \end{array} \right]$$

$$13. \left[\begin{array}{cccc|c} 2,625 & -2 & 0 & 0 & 0,5625 \\ -1 & 2,140625 & -1 & 0 & 0,08025 \\ 0 & -1 & 2,15625 & -1 & 0,10305 \\ 0 & 0 & -1 & 2,171875 & -0,86769 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0,32989 \\ 0,15172 \\ -0,08535 \\ -0,43881 \\ -1 \end{array} \right]$$

$$14. \left[\begin{array}{cccc|c} 3,0625 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2,05 & -1 & 0 & 0,01395 \\ 0 & -1 & 2,04167 & -1 & 0,02534 \\ 0 & 0 & -1 & 2,03571 & 1,03498 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0,31109 \\ 0,47636 \\ 0,65150 \\ 0,82844 \\ 1 \end{array} \right]$$

$$15. \left[\begin{array}{ccccc|c} 1,04 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0,36 \\ -0,5 & 1,04 & -0,5 & 0 & 0 & 0,04 \\ 0 & -0,5 & 1,04 & -0,5 & 0 & 0,04 \\ 0 & 0 & -0,5 & 1,04 & -0,5 & 0,04 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 1,04 & 0,54 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -0,24260 \\ 0,10769 \\ 0,38660 \\ 0,61644 \\ 0,81560 \\ 1 \end{array} \right]$$

$$16. \left[\begin{array}{ccccc|c} 0,4 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,3016 \\ -0,3 & 0,4 & -0,1 & 0 & 0 & 0,0064 \\ 0 & -0,3 & 0,4 & -0,1 & 0 & 0,0144 \\ 0 & 0 & -0,3 & 0,4 & -0,1 & 0,0256 \\ 0 & 0 & 0 & -0,4 & 0,8 & 0,44 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1,02028 \\ 1,06519 \\ 1,13586 \\ 1,20388 \\ 1,15194 \end{array} \right]$$

$$17. \left[\begin{array}{ccccc|c} 2,08 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0,008 \\ -1 & 2,08 & -1 & 0 & 0 & 0,016 \\ 0 & -1 & 2,08 & -1 & 0 & 0,024 \\ 0 & 0 & -1 & 2,08 & -1 & 0,032 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3,68 & 0,84 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0,08677 \\ 0,17249 \\ 0,25600 \\ 0,33600 \\ 0,41087 \end{array} \right]$$

$$18. \left[\begin{array}{ccc|c} 0,4 & -0,075 & 0 & 0,125 \\ -0,325 & 0,4 & -0,075 & 0,125 \\ 0 & -0,325 & 0,4 & 0,125 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0,48104 \\ 0,89888 \\ 1,04284 \\ 0 \end{array} \right]$$

$$19. \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -0,95 & 0 & 0 & 0 & 1,09 \\ -1,05 & 2 & -0,95 & 0 & 0 & 0,04 \\ 0 & -1,05 & 2 & -0,95 & 0 & 0,04 \\ 0 & 0 & -1,05 & 2 & -0,95 & 0,04 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -0,34 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1,01805 \\ 0,99588 \\ 0,92929 \\ 0,81357 \\ 0,64357 \end{array} \right]$$

$$20. \left[\begin{array}{cccc|c} 2,1875 & -2 & 0 & 0 & 0,375 \\ -0,75 & 2 & -1,25 & 0 & 0,015625 \\ 0 & -0,75 & 2 & -1,25 & 0,03125 \\ 0 & 0 & -0,75 & 2 & 1,29688 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1,25415 \\ 1,18423 \\ 1,12978 \\ 1,07210 \\ 1 \end{array} \right]$$

$$21. \left[\begin{array}{ccccc|c} 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,208 \\ -0,2 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0,016 \\ 0 & -0,2 & 0,2 & 0 & 0 & 0,024 \\ 0 & 0 & -0,2 & 0,2 & 0 & 0,032 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2 & 0,2 & 0,04 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1,04000 \\ 1,12000 \\ 1,24000 \\ 1,40000 \\ 1,60000 \end{array} \right]$$

$$22. \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -0,5 & 0 & 0 & 1,50391 \\ -1,5 & 2 & -0,5 & 0 & 0,01563 \\ 0 & -1,5 & 2 & -0,5 & 0,03516 \\ 0 & 0 & -2 & 2,5 & 0,3125 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1,00581 \\ 1,01541 \\ 1,01299 \\ 0,93539 \end{array} \right]$$

$$23. \left[\begin{array}{ccccc|c} 0,8 & -0,3 & 0 & 0 & 0 & 0,52 \\ -0,5 & 0,8 & -0,3 & 0 & 0 & 0,02 \\ 0 & -0,5 & 0,8 & -0,3 & 0 & 0,02 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,8 & -0,3 & 0,02 \\ 0 & 0 & 0 & -0,8 & 1,4 & 0,32 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1,06082 \\ 1,09553 \\ 1,08671 \\ 1,00533 \\ 0,80305 \end{array} \right]$$

$$24. \left[\begin{array}{cccc|c} 0,2 & 0,025 & 0 & 0 & 0,5125 \\ -0,225 & 0,2 & 0,025 & 0 & 0,0625 \\ 0 & -0,225 & 0,2 & 0,025 & 0,0625 \\ 0 & 0 & -0,2 & 0,1375 & 0,0625 \end{array} \right] , \left[\begin{array}{c} 2 \\ 2,24809 \\ 2,51527 \\ 2,61069 \\ 4,25191 \end{array} \right]$$

$$25. \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,375 & 0 & 0,125 \\ -0,625 & 1 & -0,375 & 0,125 \\ 0 & -0,625 & 1 & 0,125 \end{array} \right] , \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0,30147 \\ 0,47059 \\ 0,41912 \\ 0 \end{array} \right]$$

$$26. \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -0,5 & 0 & 0 & 1,54 \\ -1,5 & 2 & -0,5 & 0 & 0,04 \\ 0 & -1,5 & 2 & -0,5 & 0,04 \\ 0 & 0 & -1,5 & 2 & 0,04 \end{array} \right] , \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1,03008 \\ 1,04033 \\ 0,99107 \\ 0,76331 \\ 0 \end{array} \right]$$

$$27. \left[\begin{array}{ccccc|c} 2,5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2,625 & -1 & 0 & 0 & 0,125 \\ 0 & -1 & 2,75 & -1 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & -1 & 2,875 & -1 & 0,375 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0,5 \end{array} \right] , \left[\begin{array}{c} 0,19608 \\ 0,24510 \\ 0,32230 \\ 0,39123 \\ 0,42749 \end{array} \right]$$

$$28. \left[\begin{array}{cccc|c} 0,5 & -0,125 & 0 & 0 & 0,4375 \\ -0,375 & 0,5 & -0,125 & 0 & 0,0625 \\ 0 & -0,375 & 0,5 & -0,125 & 0,0625 \\ 0 & 0 & -1 & 1,5 & 0 \end{array} \right] , \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1,22340 \\ 1,39362 \\ 1,40426 \\ 0,93617 \end{array} \right]$$

$$29. \left[\begin{array}{cccccc|c} 2,2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2 \\ -1 & 2,008 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0,008 \\ 0 & -1 & 2,016 & -1 & 0 & 0 & 0,016 \\ 0 & 0 & -1 & 2,024 & -1 & 0 & 0,024 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2,032 & -1 & 0,032 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2,84 & 0,44 \end{array} \right] , \left[\begin{array}{c} 0,02252 \\ 0,12477 \\ 0,22002 \\ 0,30280 \\ 0,36883 \\ 0,41467 \end{array} \right]$$

$$30. \left[\begin{array}{cccccc|c} 2,04 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0,008 \\ -1 & 2,04 & -1 & 0 & 0 & 0,016 \\ 0 & -1 & 2,04 & -1 & 0 & 0,024 \\ 0 & 0 & -1 & 2,04 & -1 & 0,032 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2,04 & 0,04 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0,07022 \\ 0,13526 \\ 0,18970 \\ 0,22774 \\ 0,24288 \end{array} \right]$$

$$31. \left[\begin{array}{cccccc|c} 2,44 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,2 \\ -1 & 2,04 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0,008 \\ 0 & -1 & 2,04 & -1 & 0 & 0 & 0,016 \\ 0 & 0 & -1 & 2,04 & -1 & 0 & 0,024 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2,04 & -1 & 0,032 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2,84 & -0,76 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1,29053 \\ 0,97444 \\ 0,68933 \\ 0,41580 \\ 0,13490 \\ -0,17261 \end{array} \right]$$

$$32. \left[\begin{array}{cccc|c} 2,04 & -1 & 0 & 0 & 0,03908 \\ -1 & 2,04 & -1 & 0 & 0,09548 \\ 0 & -1 & 2,04 & -1 & 0,17492 \\ 0 & 0 & -1 & 2,04 & 0,28487 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0,19128 \\ 0,35112 \\ 0,42953 \\ 0,35019 \\ 0 \end{array} \right]$$

$$33. \left[\begin{array}{ccccc|c} 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,208 \\ -0,2 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0,016 \\ 0 & -0,2 & 0,2 & 0 & 0 & 0,024 \\ 0 & 0 & -0,2 & 0,2 & 0 & 0,032 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2 & 0,2 & 0,04 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1,04000 \\ 1,12000 \\ 1,24000 \\ 1,40000 \\ 1,60000 \end{array} \right]$$

$$34. \left[\begin{array}{cccccc|c} 2,84 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,4 \\ -1 & 2,04071 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0,0016 \\ 0 & -1 & 2,04262 & -1 & 0 & 0 & 0,0064 \\ 0 & 0 & -1 & 2,04555 & -1 & 0 & 0,0144 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2,04946 & -1 & 0,0256 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2,25437 & 0,24 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -0,20225 \\ -0,08720 \\ 0,02270 \\ 0,12717 \\ 0,22304 \\ 0,30433 \end{array} \right]$$

$$35. \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1,84615 \\ 2,53846 \\ 2,30769 \\ 0 \end{array} \right]$$

$$*36. \left[\begin{array}{cccc|c} 0,08 & 0,96 & 0 & 0 & 1,104 \\ -1,04 & 0,08 & 0,96 & 0 & 0,128 \\ 0 & -1,04 & 0,08 & 0,96 & 0,192 \\ 0 & 0 & -1,04 & 0,08 & 1,216 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ -0,99234 \\ 1,23266 \\ -1,04443 \\ 1,62246 \\ -1 \end{array} \right]$$

metodou umělé difúze:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 2,064 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0,128 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0,192 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0,256 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1,032 \\ 1,096 \\ 1,192 \\ 1,320 \\ -1 \end{array} \right]$$

metodou upwind:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2,08 & -0,04 & 0 & 0 & 2,104 \\ -2,04 & 2,08 & -0,04 & 0 & 0,128 \\ 0 & -2,04 & 2,08 & -0,04 & 0,192 \\ 0 & 0 & -2,04 & 2,08 & 0,216 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1,03264 \\ 1,09726 \\ 1,19297 \\ 1,27387 \\ -1 \end{array} \right]$$

$$*37. \left[\begin{array}{ccccc|c} 0,2 & 0,12 & 0 & 0 & 0 & 0,66 \\ -0,34 & 0,2 & 0,14 & 0 & 0 & 0,02 \\ 0 & -0,36 & 0,2 & 0,16 & 0 & 0,02 \\ 0 & 0 & -0,38 & 0,2 & 0,18 & 0,02 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2 & 0,2 & 1,62 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 2 \\ 2,30872 \\ 1,65213 \\ 3,38956 \\ -0,39465 \\ 7,70535 \end{array} \right]$$

metodou umělé difúze:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0,6 & -0,08 & 0 & 0 & 0 & 1,06 \\ -0,54 & 0,6 & -0,6 & 0 & 0 & 0,02 \\ 0 & -0,56 & 0,6 & -0,04 & 0 & 0,02 \\ 0 & 0 & -0,58 & 0,6 & -0,02 & 0,02 \\ 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0,6 & 0,02 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 2 \\ 2,04481 \\ 2,08610 \\ 2,12436 \\ 2,15999 \\ 2,19323 \end{array} \right]$$

metodou upwind:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0,64 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & 1,10 \\ -0,58 & 0,68 & -0,1 & 0 & 0 & 0,02 \\ 0 & -0,62 & 0,72 & -0,1 & 0 & 0,02 \\ 0 & 0 & -0,66 & 0,76 & -0,1 & 0,02 \\ 0 & 0 & 0 & -0,7 & 0,7 & -0,02 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 2 \\ 2,04459 \\ 2,08535 \\ 2,12180 \\ 2,14777 \\ 2,11920 \end{array} \right].$$

Kapitola 7

1. $I_O = 25/32$, $I_L = 11/16$, $I(f) = 3/4$ a tedy $E_O = -1/32$, $E_L = 1/16$
2. $I_O = 0,128191$, $I_L = 0,149248$, $E_O = 0,007066$ a $E_L = -0,0139911$
3. Vznikne Simpsonovo pravidlo pro $n = 4$
4. $I_L = 1,866025$, $\bar{I}_L = 1,901259$, $I(f) = 1,913223$, vznikne Simpsonovo pravidlo pro $n = 2$
5. Částice urazí přibližně dráhu $s = 4,1087$. Přesná hodnota je $s = 4,1814$
6.
 - a) $I(f) = 71,914$
 - b) $I_O = 71,077$, $\varepsilon_O = 0,837$, $I_L = 73,593$, $\varepsilon_L = 1,679$, $I_S = 71,939$, $\varepsilon_S = 0,025$
 - c) $\varepsilon_O = 2,589$, $\varepsilon_L = 5,178$, $\varepsilon_S = 0,076$
 - d) $n_O = 31$, $n_L = 44$, $n_S = 6$
7.
 - a) $I(f) = 6,70406$
 - b) $I_O = 6,697$, $\varepsilon_O = 0,007$, $I_L = 6,718$, $\varepsilon_L = 0,014$, $I_S = 6,70412$, $\varepsilon_S = 0,00006$
 - c) $\varepsilon_O = 0,010$, $\varepsilon_L = 0,021$, $\varepsilon_S = 0,00017$
 - d) $n_O = 2$, $n_L = 2$, $n_S = 2$
8.
 - a) $n_O = 4$, $n_L = 10$, $n_S = 3$
 - b) $n_O = 6$, $n_L = 9$, $n_S = 3$
 - c) $n_O = 23$, $n_L = 32$, $n_S = 6$
 - d) $n_O = 21$, $n_L = 30$, $n_S = 6$
 - e) $n_O = 13$, $n_L = 19$, $n_S = 3$
 - f) $n_O = 607$, $n_L = 858$, $n_S = 10$
9. $E_{G2} = -0,071672$, $E_{G3} = 0,016323$, $E_{S2} = 0,091906$, $E_{S4} = -0,008094$
10.
 - a) $I_{G2} = 0,785493$, $E_{G2} = 0,000095$, $I_S = 0,784082$, $E_S = 0,001316$
 - b) $I_{G2} = 0,147605$, $E_{G2} = 0,000384$, $I_S = 0,146632$, $E_S = 0,000589$
 - c) $I_{G2} = 0,451981$; $E_{G2} = 0,000005$; $I_S = 0,451970$; $E_S = 0,000006$

11. a) $I_{G3} = 2,840885$, $E_{G3} = 0,000461$, $I_S = 2,843385$, $E_S = 0,001039$
b) $I_{G3} = 0,851987$, $E_{G3} = 0,066589$, $I_S = 0$; $E_S = 0,785398$
c) $I_{G3} = 0,913872$, $E_{G3} = 0,018500$, $I_S = 0,876676$, $E_S = 0,018696$
d) $I_{G3} = 6,085652$, $E_{G3} = 0,009756$, $I_S = 6,036007$, $E_S = 0,039889$
12. $I_{G3} = 1,605419$, $E_{G3} = 0,000006$, $I_S = 1,605418$, $E_S = 0,000005$ a
položíme $\sin x/x = 1$ pro $x = 0$
13. $I = 5,539654$
a) $I_O = 4$, $E_O = 1,539654$
b) $I_L = 9,564525$, $E_L = 4,024871$
c) $I_S = 5,597485$, $E_S = 0,057831$
14. a) $I_O = 5,424557$, $E_O = 0,115097$
b) $I_L = 5,774105$, $E_L = 0,234551$
c) $I_S = 5,543605$, $E_S = 0,003951$
15. Plocha trojúhelníka $T = \overline{ABC}$ je $1/2 \text{ abs} \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}$
16. $|T|f((A + B + C)/3) = -6,03906$, $|T|(f(A) + f(B) + f(C))/3 = -7,47656$, $|T|(f((A + B)/2) + f((B + C)/2) + f((C + A)/2))/3 = -6,36914$
17. $I(f) = 3,738625$

Kapitola 8

1.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 12 & -6 & & & 6,1667 \\ -6 & 12 & -6 & & 0,1667 \\ & & -6 & 12 & 0,1667 \\ & & & -6 & 12 & 0,1667 \\ & & & & -6 & 12 & 0,1667 \end{array} \right], \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0,90278 \\ 0,77778 \\ 0,62500 \\ 0,44444 \\ 0,23611 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -2,5 & & & -2,3 \\ -2,5 & 5 & -2,5 & & 0,2 \\ & -2,5 & 5 & -2,5 & 0,2 \\ & & -2,5 & 5 & -2,5 \\ & & & -6 & 12 \end{array} \right] -0,9 \left[\begin{array}{c} -1 \\ -1,04 \\ -1,16 \\ -1,36 \\ -1,64 \\ -2 \end{array} \right]$$

3.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 10 & -5 & & & -4,8 \\ -5 & 10 & -5 & & 0,2 \\ & -5 & 10 & -5 & 0,2 \\ & & -5 & 10 & -5 \\ & & & -5 & 5 \end{array} \right] -0,9 \left[\begin{array}{c} -1 \\ -1,02 \\ -1,08 \\ -1,18 \\ -1,32 \\ -1,5 \end{array} \right]$$

4.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & -4 & & & 8 \\ -4 & 8 & -4 & & 0 \\ & -4 & 8 & -4 & 0 \\ & & -4 & 6 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1,75 \\ 1,5 \\ 1,25 \\ 1 \end{array} \right]$$

5.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1,3 & -0,8 & & & 0,1875 \\ -0,8 & 1,6 & -0,8 & & 0,375 \\ & -0,8 & 1,6 & -0,8 & 0,375 \\ & & -0,8 & 1,6 & 0,375 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1,07143 \\ 1,50670 \\ 1,47321 \\ 0,97098 \\ 0 \end{array} \right]$$

6.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & & & -0,85 \\ -2 & 4 & -2 & & 0,3 \\ & -2 & 4 & -2 & 0,3 \\ & & -2 & 4 & -2 \\ & & & -2 & 4 \end{array} \right] 4,3 \left[\begin{array}{c} 1,375 \\ 1,8 \\ 2,075 \\ 2,2 \\ 2,175 \\ 2 \end{array} \right]$$

7.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 48 & -22,5 & & & 50,8333 \\ -25,5 & 48 & -22,5 & & -0,1667 \\ & -25,5 & 48 & -22,5 & -0,1667 \\ & & -25,5 & 48 & -22,5 \\ & & & -25,5 & 48 \end{array} \right] -0,1667 \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1,74587 \\ 1,46526 \\ 1,15464 \\ 0,81002 \\ 0,42685 \\ 0 \end{array} \right]$$

8.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & -3,5 & & & 0,2 \\ -4,5 & 8 & -3,5 & & 0,2 \\ & -4,5 & 8 & -3,5 & 0,2 \\ & & -4,5 & 8 & -3,5 \\ & & & -4,5 & 4,5 \end{array} \right] -0,9 \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0,05362 \\ 0,06542 \\ 0,02344 \\ -0,08767 \\ -0,28767 \end{array} \right]$$

9.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3,2 & -1,1 & & & -1,6 \\ -2,1 & 3,2 & -1,1 & & 0,5 \\ & -2,1 & 3,2 & -1,1 & 0,5 \\ & & -2,1 & 4,1 & 0,25 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} -1 \\ -0,56725 \\ -0,19564 \\ 0,05925 \\ 0,09133 \end{array} \right]$$

10.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -3,5 & & & 0,1667 \\ -2,5 & 6 & -3,5 & & 0,1667 \\ & -2,5 & 6 & -3,5 & 0,1667 \\ & & -2,5 & 6 & -3,5 \\ & & & -2,5 & 6 \end{array} \right] 0,1667 \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0,16280 \\ 0,23147 \\ 0,23291 \\ 0,18631 \\ 0,10541 \\ 0 \end{array} \right]$$

11.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2,4 & -1,7 & & & 0,1667 \\ -0,7 & 2,4 & -1,7 & & 0,1667 \\ & -0,7 & 2,4 & -1,7 & 0,1667 \\ & & -0,7 & 2,4 & -1,7 \\ & & & -0,7 & 2,4 \end{array} \right] 0,1667 \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0,42445 \\ 0,50118 \\ 0,43474 \\ 0,30934 \\ 0,15967 \\ 0 \end{array} \right]$$

12.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 7,25 & -5,25 & & & 1,2 \\ -4,75 & 10 & -5,25 & & 0,4 \\ & -4,75 & 10 & -5,25 & 0,4 \\ & & -4,75 & 10 & -5,25 \\ & & & -4,75 & 10 \end{array} \right] 0,4 \left[\begin{array}{c} 0,63601 \\ 0,64973 \\ 0,58596 \\ 0,45206 \\ 0,25473 \\ 0 \end{array} \right]$$

13.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 10,2 & -10,2 & & & 1,1 \\ -9,8 & 20 & -10,2 & & 0,2 \\ & -9,8 & 20 & -10,2 & 0,2 \\ & & -9,8 & 20 & 0,2 \\ & & & -9,8 & 20 \\ & & & & 12,44 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1,88709 \\ 1,77925 \\ 1,65602 \\ 1,51803 \\ 1,36583 \\ 1,2 \end{array} \right]$$

14.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 12 & -5,9 & & & 6,3 \\ -7,1 & 14 & -6,9 & & 0,2 \\ & -8,1 & 16 & -7,9 & 0,2 \\ & & -9,1 & 18 & 0,2 \\ & & & -10,1 & 10,5 \\ & & & & 0,42 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1,09758 \\ 1,16457 \\ 1,20451 \\ 1,22015 \\ 1,21367 \end{array} \right]$$

15.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5,4667 & -5,4667 & & & 2,9 \\ -4,4667 & 9,7355 & -5,2687 & & -0,2 \\ & -4,2687 & 9,1493 & -4,8806 & -0,2 \\ & & -3,8806 & 8,1984 & -4,3178 \\ & & & -3,3178 & 6,9207 \\ & & & & 14,2115 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 5,66795 \\ 5,13747 \\ 4,72569 \\ 4,40652 \\ 4,16599 \\ 4 \end{array} \right]$$

16.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 7,2 & -3,3 & & & 0,25 \\ -3,5 & 6,4 & -2,9 & & 0,25 \\ & -3,1 & 5,6 & -2,5 & 0,25 \\ & & -2,7 & 2,7 & -1,875 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ -0,21156 \\ -0,53734 \\ -1,01673 \\ -1,71117 \end{array} \right]$$

17.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4,4167 & -4,4167 & & & 0,1 \\ -2,4167 & 7,3333 & -4,9167 & & 0,2 \\ & -2,9167 & 7,8333 & -4,9167 & 0,2 \\ & & -2,9167 & 7,3333 & 0,2 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0,23830 \\ 0,21566 \\ 0,16385 \\ 0,09244 \\ 0 \end{array} \right]$$

18.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & -3,75 & & & 4,4514 \\ -4,25 & 8 & -3,75 & & 0,1674 \\ & -4,25 & 8 & -3,75 & 0,1433 \\ & & -4,25 & 6,25 & 0,4653 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0,98556 \\ 0,91550 \\ 0,79145 \\ 0,61263 \end{array} \right]$$

19.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3,1333 & -0,9667 & & & 0,0093 \\ -1,9667 & 3,1333 & -0,9667 & & 0,0333 \\ & -1,9667 & 3,1333 & -0,9667 & 0,0733 \\ & & -1,9667 & 3,1333 & 0,1293 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0,01733 \\ 0,04651 \\ 0,08102 \\ 0,09213 \\ 0 \end{array} \right]$$

20.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1,0667 & -0,9667 & & & -1,8933 \\ -0,9667 & 3,1333 & -1,9667 & & 0,24 \\ & -1,9667 & 5,1333 & -2,9667 & 0,28 \\ & & -2,9667 & 7,1333 & 0,32 \\ & & & -3,9667 & 9,1333 \\ & & & & 0,36 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -2,69538 \\ -1,01559 \\ -0,41525 \\ -0,13964 \\ -0,02123 \\ 0 \end{array} \right]$$

21.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4,0667 & -0,9833 & & & 3,4833 \\ -2,9833 & 4,0667 & -0,9833 & & 0,5 \\ & -2,9833 & 4,0667 & -0,9833 & 0,5 \\ & & -2,9833 & 3,0333 & -0,75 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1,17276 \\ 1,30768 \\ 1,34152 \\ 1,07216 \end{array} \right]$$

22.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 10,4 & -4,9 & & & 4,9396 \\ -4,9 & 10,4 & -4,9 & & 0,0776 \\ & -4,9 & 10,4 & -4,9 & 0,1126 \\ & & -4,9 & 10,4 & 9,9430 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0,96323 \\ 1,03632 \\ 1,22046 \\ 1,53108 \\ 2 \end{array} \right]$$

23.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 9,7333 & -4,2667 & & & 5,6879 \\ -5,2667 & 9,1333 & -3,8667 & & 0,2445 \\ & -4,8667 & 8,1333 & -3,2667 & 0,2702 \\ & & -4,2667 & 6,7333 & 2,7653 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1,09681 \\ 1,16900 \\ 1,20410 \\ 1,17368 \\ 1 \end{array} \right]$$

10 Individuální úlohy

1. Najděte všechny nulové body, lokální extrémy a inflexní body funkce $f(x) = x^4 - 30x^3 - 20x^2 - 60x + 8$ s chybou, menší než $\varepsilon = 1e-5$. [Nulové body: 0,1269433; 30,7144836, lokální extrémy: v bodu $x = 22,9639105$ nabývá polynom lokálního minima -97122,40603, inflexní body: -0,2190241]
2. Ukládáte-li pravidelný měsíční vklad 250 Kč a roční úroková míra je I , pak je uložená částka po 60 vkladech (tj. po 5 letech spoření) rovna

$$C = \frac{3000}{I} \left[\left(1 + \frac{I}{12} \right)^{60} - 1 \right].$$

Pomocí vhodné implementace metody půlení vypočtete minimální úrokovou míru, zaručující částku a) $C = 25\,000$ Kč, b) $C = 30\,000$ Kč a c) $C = 35\,000$ Kč s chybou, menší než $\varepsilon = 0,001$. [Úroková míra I je a) 0,194, b) 0,257 a c) 0,309.]

3. Najděte tři funkce $F(x)$, pro něž je rovnice $x = F(x)$ ekvivalentní s

$$e^x - x^2 - x - 1 = 0$$

a vyberte tu, která je pro aproximaci kořene rovnice z intervalu $(1,7; 1,8)$ nejvhodnější. Tento kořen vypočtete vybranou iterační metodou s chybou, menší než 0,01 užitím tabulkového procesoru MS Excel.

4. Navrhněte postup, jak efektivně počítat odmocninu z daného kladného čísla c užitím tabulkového procesoru MS Excel. Užijte Newtonovy metody a vhodné volby počáteční aproximace.
5. Integrál

$$I = \int_{-1}^2 e^x dx$$

vypočtete nejprve přesně a potom složeným lichoběžníkovým pravidlem pro a) $n = 3$, b) $n = 6$ a c) $n = 12$ podintervalů. Aproximace a) - c) vypočtete užitím tabulkového procesoru MS Excel.

6. Navrhněte postup řešení počáteční úlohy

$$y' = f(x, y) \quad \text{v} \quad (a, b), \quad y(a) = c$$

Eulerovou metodou s daným krokem $h > 0$ tabulkovým procesorem MS Excel. Přesvědčte se, že počáteční úloha

$$y' = y + e^x \cos x \quad \text{v } (0, 1), \quad y(0) = 0$$

má řešení $y(x) = e^x \cos x$ a najděte přibližné řešení této úlohy užitím Excelu s kroky $h_1 = 0,5$ a $h_2 = 0,25$. Ověřte korektnost svého výpočtu v Excelu tím, že aproximaci s krokem h_1 vypočítáte i pomocí kalkulačky.

7. Najděte všechny kořeny rovnice

$$x^3 - 15x + 8 = 0$$

z intervalu $(-5, 5)$ s přesností 0,0005 užitím programu v Excelu, který pro danou rovnici $f(x) = 0$ najde všechna řešení z intervalu (a, b) tak, že pro dané celé číslo $n > 1$ a danou přesnost $\varepsilon > 0$ rozdělí interval $\langle a, b \rangle$ na n podintervalů ekvidistantními uzly $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, postupně pro $i = 0, \dots, n-1$ rozhodne, zda $f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0$ a v kladném případě aproximuje kořen z intervalu (x_i, x_{i+1}) s chybou, menší než ε půlením.

8. Najděte všechny kořeny rovnice

$$e^x - 2x^3 + 10x + 5 = 0$$

z intervalu $(-3, 6)$ s přesností 0,0005 užitím programu v Excelu, který pro danou rovnici $f(x) = 0$ najde všechna řešení z intervalu (a, b) tak, že pro dané celé číslo $n > 1$ a danou přesnost $\varepsilon > 0$ rozdělí interval $\langle a, b \rangle$ na n podintervalů ekvidistantními uzly $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, postupně pro $i = 0, \dots, n-1$ rozhodne, zda $f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0$ a v kladném případě aproximuje kořen z intervalu (x_i, x_{i+1}) s chybou, menší než ε metodou regula falsi.

9. Koule o průměru 1 m z borového dřeva o hustotě $\varrho = 0,638 \text{ kg m}^{-3}$ je nadnášena vodou. Vypočtěte hloubku d , do níž je přitom ponořena. Užitím Archimedova zákona najděte rovnici pro neznámou hloubku d a tuto rovnici vyřešte iterací s chybou, menší než 0,0001.

10. Najděte počet k kořenů rovnice

$$\sin x - 0,2(x+1)^2 + 1 = 0$$

a k disjunktních intervalů separujících tyto kořeny. Každý kořen nejprve aproximujte metodou půlení s chybou, menší než 0,05 a tyto aproximace zpřesněte Newtonovou metodou s chybou, menší než $0,5e-8$.

11. Navrhnete postup, jak tabulkový procesor MS Excel ověří, že daná čtvercová matice je symetrická pozitivně definitní (SPD). Použijte jej pro jednu matici, která není SPD a jednu, která je SPD.
12. Navrhnete postup, jak tabulkový procesor MS Excel pro danou matici A typu $n \times n$ a daný vektor b s n složkami ověří, že A je horní trojúhelníková a má všechny prvky v hlavní diagonále různé od nuly. V kladném případě vyřeší systém rovnic $Ax = b$.
13. Ověřte, že matice, inverzní k dolní trojúhelníkové matici je dolní trojúhelníková a navrhnete postup, jak tabulkový procesor MS Excelu k dané regulární dolní trojúhelníkové matici zkonstruuje matici inverzní.
14. Navrhnete postup, jak tabulkový procesor MS Excel najde horní trojúhelníkovou matici U z Choleského rozkladu dané SPD matice.
15. Najděte postup, jak tabulkový procesor MS Excel pro danou SPD matici A a danou horní trojúhelníkovou matici U rozhodne, zda U^T a U tvoří Choleského rozklad A .
16. Čtvercová matice A řádu n se nazývá ortogonální, když její sloupcové vektory jsou vzájemně ortogonální a jednotkové. Ověřte, že matice A je ortogonální právě když $A^{-1} = A^T$. Najděte postup, jak tabulkový procesor MS Excel rozhodne, zda daná čtvercová matice je ortogonální a užijte jej pro jednu matici ortogonální a jednu matici, která není ortogonální.
17. Navrhnete postup, jak tabulkový procesor MS Excel pro libovolnou regulární třídiagonální matici A najde matici inverzní A^{-1} . Pomocí vhodného příkladu dokumentujte odpověď na otázku, zda tyto inverzní matice jsou pásové.
18. Najděte postup, jak tabulkový procesor MS Excel najde funkci $f(x)$ ve tvaru $A \cdot e^{Bx}$, která pro dané uzly $x_0, x_1, \dots, x_n$ aproximuje hodnoty $y_0, y_1, \dots, y_n$ metodou nejmenších čtverců.
19. Uvažme uzly $x_0, x_1, \dots, x_n$ a hodnoty $y_0, y_1, \dots, y_n$.
 - a) Metodou nejmenších čtverců najděte jejich aproximaci z prostoru $\mathcal{P}^0$. Pod jakým jménem tuto konstrukci znáte?
 - b) Ověřte, že

$$\begin{aligned} (n+1)B + \left(\sum x_i\right)M &= \sum y_i \\ \left(\sum x_i\right)D + \left(\sum x_i^2\right)M &= \sum x_i y_i \end{aligned}$$

jsou normální rovnice pro aproximaci daných dat polynomem ve tvaru $P(x) = Mx + B$. Tohoto explicitního popisu normálních rovnic užíjte pro řešení konkrétního příkladu užitím tabulkového procesoru MS Excel.

20. Sestavte program pro integraci dané funkce $f(x)$ na daném intervalu (a, b) Rombergovou metodou s chybou, menší než dané kladné číslo ε .
21. Najděte hodnoty $y(x)$ teploty ve vzdálenosti $x [m]$, $x \in (0; 0,12)$ od vnějšího povrchu stěny obytné budovy, jejíž tepelná vodivost je 0,2 pro $x \in (0; 0,02) \cup (0,1; 0,12)$ a 0,5 pro $x \in (0,02; 0,1)$. Na vnějším povrchu stěny je teplota $7^\circ C$ a na vnitřním povrchu je koeficient přestupu tepla 0,2. Teplota interiéru je $21^\circ C$. Zvolte krok diskretizace $h = 0,02 m$.
22. Kovové horkovodní potrubí kruhového průřezu má tloušťku stěny 10 cm a koeficient tepelné vodivosti $0,00017 W cm^{-1} (^{\circ}C)^{-1}$. Aproximujte rozložení teploty ve stěně potrubí a intenzitu úniku tepla přes jeho vnější povrch, když na jeho vnitřním příp. vnějším povrchu je teplota $160^\circ C$ příp. $30^\circ C$. Zvolte krok diskretizace $h = 2 cm$.
23. Aproximujte koncentraci kyslíku ve vodním toku přes interval $(0, 2)$ rychlostí 0,4, když koeficient difúze je 0,1, koeficient absorpce je 0,05, intenzita zdrojů je 0, koncentrace kyslíku na vstupu je 0,6 a na výstupu platí přestupová podmínka s koeficientem přestupu 0,0125 a externí koncentrací 0. Zvolte krok diskretizace $h = 0,4$.

Reference

- [1] Amelkin V.V., Sadovskij A.P.: *Matematické modely a diferenciální rovnice*. Knihovna mladého matematika, Minsk, 1982 (v ruštině).
- [2] Burden, R.L., Douglas, J., Faires, R.L.: *Numerical Analysis*. Wadsworth Publ. Co., 1981.
- [3] Čermák, L.: *Numerické metody II*. FSI VUT, 2004.
- [4] Čermák, L., Hlavička, R.: *Numerické metody*. FSI VUT, 2005.
- [5] Dalík, J.: *Matematika IV, Numerická analýza*. CERM, s.r.o. Brno, 2008.
- [6] Míka, S., Přikryl, P., Brandner, M.: *Speciální numerické metody*. volně přístupné na internetu, 2006.

- [7] Příkryl, P.: *Numerické metody matematické analýzy*. Matematika pro vysoké školy technické, SNTL, Praha 1985.
- [8] Příkryl, P., Brandner, M.: *Numerické metody I,II*. ZČU Plzeň, 2000.
- [9] Scheid, F.: *Numerical Analysis*. McGraw-Hill, 1989.