Vzory příkladů ke zkoušce z Numerických metod II

1. Metodou konečných prvků s krokem $h = 0{,}2$ aproximujte řešení okrajové úlohy

$$
\begin{gathered}
-0{,}4y'' - y' = 0{,}7 \quad \text{v} \quad (0,1), \\
y(0) - y'(0) = 0{,}1, \quad y(1) = 0{,}2
\end{gathered}
$$

2. Metodou konečných prvků s krokem $h = 0{,}2$ aproximujte řešení okrajové úlohy

$$
\begin{gathered}
-y'' + 16y' = 0{,}8 \quad \text{v} \quad (0,1), \\
y(0) = 0{,}2, \quad y(1) = 1
\end{gathered}
$$

3. Pro okrajovou úlohu

$$
\begin{gathered}
-0{,}5y'' + y' = 0 \quad \text{v} \quad (0,1), \\
y(0) = 2, \quad -0{,}5y'(1) = 2(y(1) - 1)
\end{gathered}
$$

   uveďte fyzikální významy všech koeficientů rovnice a okrajových podmínek a nakreslete schematickou ilustraci grafu řešení. Toto řešení aproximujte metodou konečných prvků s krokem $h = 0{,}25$.

4. Pro okrajovou úlohu

$$
\begin{gathered}
-y'' - 4y' = -0{,}5 \quad \text{v} \quad (0,1), \\
y'(0) = 0{,}5(y(0) - 1), \quad y(1) = 0{,}4
\end{gathered}
$$

   uveďte fyzikální významy všech koeficientů rovnice a okrajových podmínek a nakreslete schematickou ilustraci grafu řešení. Toto řešení aproximujte metodou konečných prvků s krokem $h = 0{,}25$.

5. Uveďte formuli pro výpočet směrové derivace $\partial u/\partial \vec{s}$ pro jednotkový vektor $\vec{s} = (s_1, s_2)$. Vyjádřete operátor Δ pomocí operátorů div a ∇.

6. Formulujte PDR vedení tepla v rovině pro obecně proudění stlačitelné látky a uveďte předpoklady, za nichž byla rovnice odvozena. Odvoďte tvar rovnice pro proudění nestlačitelné látky.

7. Je dána okrajová úloha

$$-\Delta u = (1-y^2)e^x \quad \text{v} \quad \Omega,$$
$$u = 0 \quad \text{na} \quad \overline{\Gamma}_D, \quad \partial u/\partial \vec{n} = 0 \quad \text{na} \ \Gamma_N,$$

kde $\Omega = \overline{ABCDEF}$ pro body $A = (0{,}4, 0)$, $B = (1{,}4, 0)$, $C = (1{,}6, 0{,}5)$, $D = (1{,}4, 1)$, $E = (0{,}2, 1)$, $F = (0, 0{,}5)$, $\Gamma_D = \overline{AB}$ s $\Gamma_N = \partial\Omega - \Gamma_D$.

   a) Odvoďte variační formulaci.
   b) Uveďte minimizační formulaci.
   c) Navrhněte triangulaci a číslování vrcholů tak, aby šířka pásu matice tuhosti byla minimální.
   d) Uveďte pole vrcholů a pole trojúhelníků.
   e) Uveďte hodnoty prvků matice tuhosti a vektoru zatížení.
   f) Uveďte vlastnosti matice tuhosti.

8. Pro okrajovou úlohu

$$-\mathrm{div}\,((x^2+y^2)\nabla u) + u = e^{-x^2-y^2} \quad \text{v} \quad \Omega, \quad u = 20 \quad \text{na} \quad \Gamma_D,$$
$$-(x^2+y^2)\partial u/\partial \vec{n} - 3u = -60 \ \text{na} \ \Gamma_N, \quad \partial u/\partial \vec{n} = 0 \ \text{na} \ \partial\Omega - \Gamma_D - \Gamma_N,$$

kde $\Omega = \overline{ABCD}$ pro $A = (0{,}5, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (2{,}5, 1)$, $D = (1, 2)$, $\Gamma_D = \overline{CD}$ a $\Gamma_N = \overline{AB}$

   a) odvoďte variační formulaci,
   b) navrhněte triangulaci a číslování vrcholů a
   c) uveďte pole vrcholů, pole trojúhelníků a potřebná pole stran.

9. Pro úlohu "Vypočtěte teplotu rovinné desky $\Omega = \overline{ABCDE}$ pro body $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (2, 1)$, $D = (1, 2)$, $E = (0, 2)$ o tepelné vodivosti $k = 50$ $\mathrm{Wm}^{-1}({}^0\mathrm{C})^{-1}$, zahřívané s intenzitou $1 + 2x^2 + 3y$ kWm^{-2}, jejíž teplota na úsečkách $\overline{BC}$, $\overline{DE}$ je 50^0C, přes úsečku $\overline{EA}$ vtéká teplo s intenzitou 5 kWm^{-1}, na úsečce $\overline{AB}$ je splněna přestupová podmínka s koeficientem přestupu $\alpha = 10$ a s teplotou $u_{\mathrm{ext}} = 40$ a na zbývajících částech hranice je deska zaizolovaná."

   a) uveďte klasickou formulaci,

b) odvoďte variační formulaci,

c) navrhněte triangulaci a číslování vrcholů a

d) uveďte pole vrcholů, pole trojúhelníků a potřebná pole stran.

10. Je dána počáteční okrajová úloha

$$\partial u/\partial t - \operatorname{div}((1+x^2+y^3)\nabla u) + u = 1 \ \text{ v } \ \Omega \times (0,4)$$
$$u = 4 \text{ na } \overline{\Gamma}_D, \ (1+x^2+y^3)\partial u/\partial\vec{n} + 3u = -15 \text{ na } \Gamma_N,$$
$$\partial u/\partial\vec{n} = 0 \text{ na } \partial\Omega - \overline{\Gamma}_D - \Gamma_N \ \text{ pro } \ t \in (0,4),$$
$$u(x,y,0) = 4 - y \ \text{ pro } \ (x,y) \in \Omega,$$

kde Ω je polygon $\overline{ABCD}$ pro $A = (-1,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$, $D = (0,1)$, $\Gamma_D = \overline{AB}$, $\Gamma_N = \overline{CD}$.

a) Odvoďte variační formulaci.

b) Navrhněte triangulaci oblasti Ω a formulujte úlohu, která je výsledkem prostorové diskretizace.

c) Popište vznik matice hmotnosti H procesem kondenzace a uveďte její vlastnosti.

d) Uveďte 3 standardní způsoby časové diskretizace a porovnejte jejich výhody a nevýhody.

11. Je dána okrajová úloha

$$\partial u/\partial t - 2\Delta u + (0{,}7x+1)\partial u/\partial x - (1{,}5-0{,}7y)\partial u/\partial y = 5\sqrt{y} \text{ v } \Omega \times (0,2)$$
$$u = 0{,}2 \text{ na } \overline{\Gamma}_D, \quad 2\partial u/\partial\vec{n} + 10u = -50 \text{ na } \Gamma_N \ \text{ pro } \ t \in (0,2)$$
$$u(x,y,0) = (x+1)(y^2+1) \ \text{ v } \ \overline{\Omega},$$

když $\Omega = \overline{ABCD}$ pro $A = (-1,0)$, $B = (1,1)$, $C = (1,2)$, $D = (-1,3)$, $\Gamma_D = \overline{DA}$, $\Gamma_N = \partial\Omega - \Gamma_D$.

a) Zjednodušte danou diferenciální rovnici užitím Lagrageovských souřadnic.

b) Odvoďte variační formulaci a popište časovou diskretizaci s krokem $\Delta t = 0{,}4$.